

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho de Matemática

17/05/2012

Trigonometria; Espaço – Outra Visão

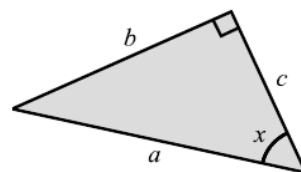
9.º Ano

Nome: _____

N.º: _____ Turma: _____

1. Na figura, está representado um triângulo retângulo em que:

- a , b e c são as medidas de comprimento dos seus lados, em centímetros;
- x é a medida da amplitude de um dos seus ângulos agudos, em graus.



Apresentam-se a seguir quatro igualdades. Apenas uma está correta. Qual?

[A] $\operatorname{sen} x = \frac{b}{a}$ ☒

[B] $\operatorname{sen} x = \frac{a}{b}$

[C] $\operatorname{sen} x = \frac{b}{c}$

[D] $\operatorname{sen} c = \frac{c}{a}$

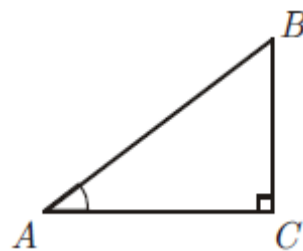
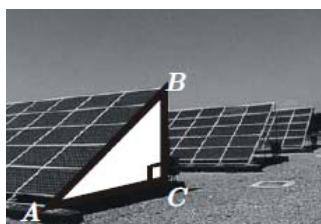
O seno da amplitude de um ângulo agudo de um triângulo retângulo é o quociente entre os comprimentos do cateto oposto ao ângulo e da hipotenusa.

2. A fotografia mostra um conjunto de painéis solares. Numa das estruturas de apoio de um desses painéis, imaginou-se um triângulo retângulo.

A figura é um esquema desse triângulo. O esquema não está desenhado à escala.

Relativamente ao triângulo [ABC], sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2,5 \text{ m}$;
- $\overline{BC} = 1,7 \text{ m}$.



Qual é a amplitude, em graus, do ângulo CAB?
Escreve o resultado arredondado às unidades.

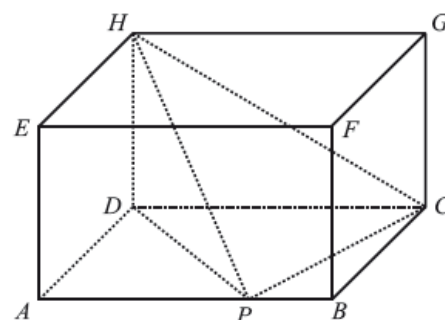
Ora, $\operatorname{sen} \hat{BAC} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$.

Logo, $\operatorname{sen} \hat{BAC} = \frac{1,7}{2,5} = 0,68$. Então, $\hat{BAC} = \operatorname{sen}^{-1}(0,68) \approx 43^\circ$.

3. Na figura, estão representados um paralelepípedo [ABCDEFGH] e uma pirâmide [HDPC], sendo P um ponto de [AB].

a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- [A] As retas DP e BC são concorrentes. ☒
- [B] As retas DP e BC são não coplanares.
- [C] As retas AB e HG são concorrentes.
- [D] As retas AB e HG são não coplanares.



Repara que as retas DP e BC pertencem ao plano que contém a base do paralelepípedo.

b) Admite que:

- $\overline{DP} = 5\text{ cm}$;
- $\widehat{DPH} = 32^\circ$.

Determina a área do triângulo [DPH].

Apresenta o resultado em centímetros quadrados, arredondado às décimas.

No triângulo retângulo (em D [Porquê?]) [DPH], temos: $\text{tg} \widehat{DPH} = \frac{\overline{DH}}{\overline{DP}}$. Logo, $\text{tg} 32^\circ = \frac{\overline{DH}}{5} \Leftrightarrow \overline{DH} = 5 \text{tg} 32^\circ$.

Então, a área do triângulo [DPH] é $A_{[DPH]} = \frac{\overline{DP} \times \overline{DH}}{2} = \frac{5 \times 5 \text{tg} 32^\circ}{2} \approx 7,8\text{ cm}^2$.

c) Admite agora que o volume da pirâmide [HDPC] é igual a 10 cm^3 .

Qual é o volume, em cm^3 , do paralelepípedo [ABCDEFGH] ?

Como se sabe, $V_{\text{Prisma}} = A_b \times h$ e $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$.

Ora, o prisma e a pirâmide possuem a mesma altura.

Por outro lado, a área da base do prisma é dupla da da pirâmide, pois a primeira é $A_{[ABCD]} = \overline{AB} \times \overline{BC}$ e a

segunda é $A_{[ABCD]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{BC}}{2}$.

Assim, $V_{\text{Prisma}} = 3 \times 2 \times V_{\text{Pirâmide}} = 6 \times 10 = 60\text{ cm}^3$.

4. Na figura está representado o prisma triangular [ABCDEF].

Sabe-se que:

- O quadrilátero [BCDE] é um quadrado;
- O triângulo [ABC] é retângulo em A.

a) Usa as letras da figura para identificares duas retas que sejam concorrentes não perpendiculares.

Duas retas concorrentes não perpendiculares são, por exemplo, AB e BC.

b) Admite agora que:

- $\overline{AC} = 8\text{ cm}$
- $\widehat{CBA} = 30^\circ$

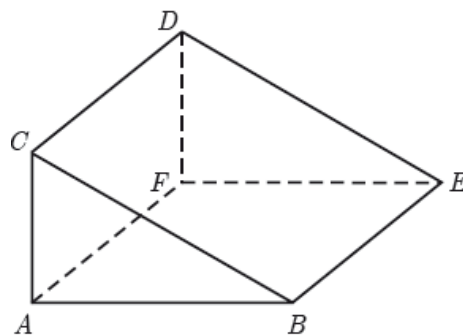
Determina a área do triângulo [ABC].

Apresenta o resultado em centímetros quadrados, arredondado às unidades.

No triângulo retângulo [ABC], temos: $\text{tg} \widehat{CBA} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

Logo, $\text{tg} 30^\circ = \frac{8}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8}{\text{tg} 30^\circ} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8}{\frac{1}{\sqrt{3}}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{8 \times \sqrt{3}}{1} \Leftrightarrow \overline{AB} = 8\sqrt{3}$.

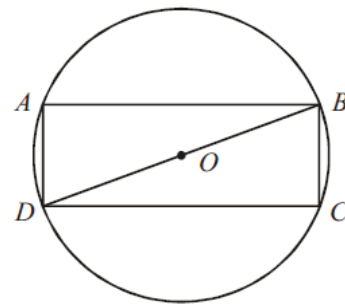
Então, a área do triângulo [ABC] é $A_{[ABC]} = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{2} = \frac{8\sqrt{3} \times 8}{2} = 32\sqrt{3} \approx 55\text{ cm}^2$.



5. Na figura, está representada uma circunferência de centro O , na qual está inscrito um retângulo $[ABCD]$. A figura não está desenhada à escala.

Sabe-se que:

- $\widehat{BDA} = 70^\circ$;
- $\overline{AB} = 4,35 \text{ cm}$.



- a) Qual é a amplitude, em graus, do arco $\widehat{AB}$?

Como a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, vem: $\widehat{AB} = 2 \times \widehat{BDA} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$.

- b) Quantos eixos de simetria tem o retângulo $[ABCD]$?

O retângulo $[ABCD]$ tem dois eixos de simetria: as mediatrizes dos lados $[AB]$ e $[BC]$.

- c) Qual é o comprimento, em centímetros, do diâmetro $[BD]$ da circunferência?
Apresenta os cálculos que efetuaste e escreve o resultado arredondado às centésimas.

O triângulo $[ABD]$ é rectângulo em A , pois está inscrito num arco de semicircunferência.

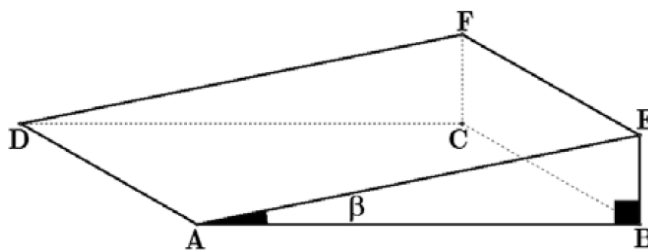
Neste triângulo, temos: $\sin \widehat{BDA} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}}$.

Logo, $\sin 70^\circ = \frac{4,35}{\overline{BD}} \Leftrightarrow \overline{BD} = \frac{4,35}{\sin 70^\circ}$. Assim, $\overline{BD} \approx 4,63 \text{ cm}$.

6. Uma rampa de pedra, cujo modelo geométrico é um prisma em que as faces laterais são retângulos e as bases são triângulos retângulos, está representado na figura.

Sabe-se que, nesse prisma de bases triangulares:

- $\overline{AB} = 300 \text{ cm}$;
- $\overline{BC} = 250 \text{ cm}$;
- $\overline{BE} = 42 \text{ cm}$.



- a) Em relação à figura, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [A] O plano que contém a face $[ABE]$ é perpendicular ao plano que contém a face $[AEFD]$. ☒
- [B] O plano que contém a face $[ABE]$ é paralelo ao plano que contém a face $[AEFD]$.
- [C] O plano que contém a face $[ABE]$ é oblíquo ao plano que contém a face $[AEFD]$.
- [D] O plano que contém a face $[ABE]$ é coincidente com o plano que contém a face $[AEFD]$.

- b) Calcula a amplitude, em graus, do ângulo β .

Apresenta os cálculos que efetuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às unidades.

No triângulo rectângulo $[ABE]$, temos: $\text{tg } \beta = \frac{\overline{BE}}{\overline{AB}}$.

Logo, $\text{tg } \beta = \frac{42}{300} \Leftrightarrow \text{tg } \beta = \frac{7}{50}$. Assim, $\beta = \text{tg}^{-1}\left(\frac{7}{50}\right) \approx 8^\circ$.

- c) Determina o volume do prisma representado na figura.

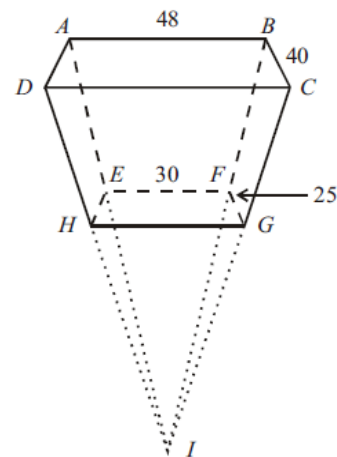
Apresenta os cálculos que efetuares e, na tua resposta, escreve a unidade de medida.

O volume do prisma é $V = \frac{\overline{AB} \times \overline{BE}}{2} \times \overline{BC} = \frac{300 \times 42}{2} \times 250 = 1575000 \text{ cm}^3$.

7. A figura representa um modelo geométrico de um comedouro de um camelo. Este modelo não está desenhado à escala.

Sabe-se que:

- $[ABCDI]$ é uma pirâmide reta de base retangular;
- $[ABCDEFGH]$ é um tronco de pirâmide de bases retangulares e paralelas.



- a) Qual é a posição da reta AI relativamente ao plano EFG?

- [A] Concorrente perpendicular.
 [B] Concorrente oblíqua. ☒
 [C] Estritamente paralela.
 [D] Contida no plano.

- b) Determina o volume, em cm^3 , do tronco de pirâmide representado na figura, sabendo que:

- $\overline{AB} = 48\text{ cm}$, $\overline{BC} = 40\text{ cm}$, $\overline{EF} = 30\text{ cm}$ e $\overline{FG} = 25\text{ cm}$;
- A altura da pirâmide $[ABCDI]$ é 80 cm , e a altura do tronco de pirâmide é 30 cm .

O volume do tronco de pirâmide é:

$$\begin{aligned} V_T &= V_{[ABCDI]} - V_{[EFGHI]} \\ &= \frac{1}{3} \times (48 \times 40) \times 80 - \frac{1}{3} \times (30 \times 25) \times (80 - 30) \\ &= \frac{48 \times 40 \times 80 - 30 \times 25 \times 50}{3} \\ &= 38700\text{ cm}^3 \end{aligned}$$

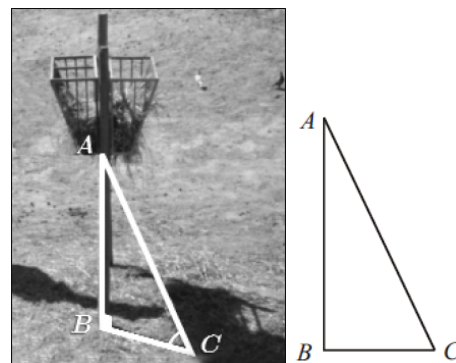
- c) Imaginou-se um triângulo $[ABC]$, em que o cateto $[AB]$ representa o suporte de comedouro e o cateto $[BC]$ a sombra desse suporte.

Na figura está um esquema desse triângulo. O esquema não está desenhado à escala.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 1,26\text{ m}$;
- $\overline{BC} = 0,6\text{ m}$.

Qual é a amplitude, em graus, do ângulo ACB?
 Escreve o resultado arredondado às unidades.



No triângulo rectângulo $[ABC]$, temos: $\text{tg } \hat{ACB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$.

Logo, $\text{tg } \hat{ACB} = \frac{1,26}{0,6} \Leftrightarrow \text{tg } \hat{ACB} = 2,1$.

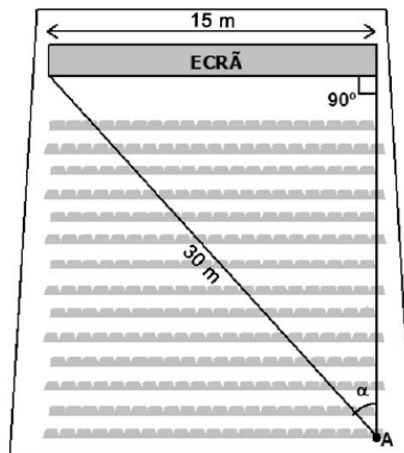
Assim, $\hat{ACB} = \text{tg}^{-1} 2,1 \approx 65^\circ$.

8. A figura representa uma sala de cinema. O João sentou-se no último lugar da última fila, assinalado, na figura, pelo ponto A. O ângulo de vértice A é o seu ângulo de visão para o ecrã.

No cinema, as pessoas que se sentam no lugar em que o João está sentado devem ter um ângulo de visão de, **pelo menos, 26°**, sendo o ideal 36°, para que possam ter uma visão clara do filme.

Tendo em atenção as medidas indicadas na figura, determina a amplitude do ângulo de visão do lugar do João.

Na tua resposta, apresenta os cálculos que efetuaste e explica se a amplitude obtida permite uma visão clara do filme.



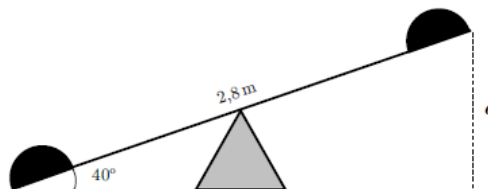
No triângulo rectângulo considerado, temos: $\sin \alpha = \frac{15}{30} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2}$.

Assim, $\alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 30^\circ$. Essa amplitude permite ao João ter uma visão clara do filme, pois $\alpha \geq 26^\circ$.

9. No jardim da família Coelho, encontra-se um balancé, com uma trave de 2,8 m de comprimento, como o representado na figura.

Quando uma das cadeiras está em baixo, a trave do balancé forma um ângulo de 40° com o solo, tal como é mostrado na figura.

Determina, em metros, a altura máxima, a , a que a outra cadeira pode estar.



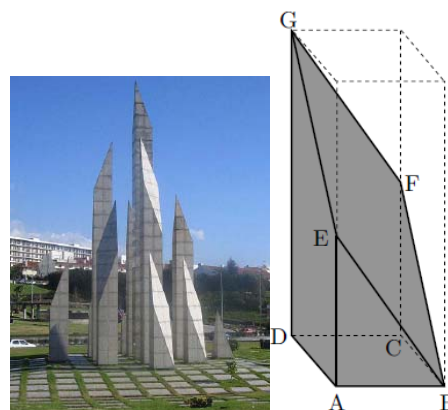
Apresenta os cálculos que efetuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às décimas.

No triângulo rectângulo considerado, temos: $\sin 40^\circ = \frac{a}{2,8}$.

Assim, a outra cadeira pode estar a uma altura máxima de $a = 2,8 \sin 40^\circ \approx 1,8$ metros.

10. Considera a fotografia de um monumento situado no centro de uma cidade. Todos os blocos desse monumento resultam do corte de um prisma quadrangular reto.

A figura representa o modelo geométrico de um dos blocos do mesmo monumento.



- a) Em relação à figura, qual das seguintes afirmações é verdadeira?

- [A] A reta EG é paralela ao plano que contém a face [ABCD].
 [B] A reta EG é perpendicular ao plano que contém a face [ABCD].
 [C] A reta FB é paralela ao plano que contém a face [ADGE]. ☒
 [D] A reta FB é perpendicular ao plano que contém a face [ADGE].

- b) Na figura, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 2 \text{ m}$;
- $\widehat{AEB} = 35^\circ$.

Qual é, em metros, a medida do comprimento de [EB]?

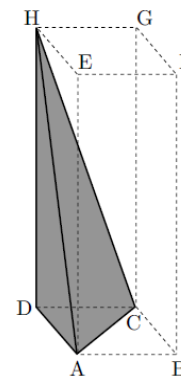
Apresenta os cálculos que efetuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às unidades.

No triângulo rectângulo [ABE], temos: $\sin \widehat{AEB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{EB}}$.

Assim, $\sin 35^\circ = \frac{2}{\overline{EB}} \Leftrightarrow \overline{EB} = \frac{2}{\sin 35^\circ}$. Logo, $\overline{EB} \approx 3 \text{ m}$.

c) No sólido representado na figura ao lado, sabe-se que:

- [ABCDEFGH] é um prisma quadrangular reto;
- $\overline{DA} = \overline{DC} = 2\text{ m}$;
- $\overline{DH} = 5\text{ m}$.



Qual é, em metros cúbicos, o volume da pirâmide triangular sombreada?

Apresenta os cálculos que efetuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às décimas.

O volume da pirâmide triangular sombreada é:

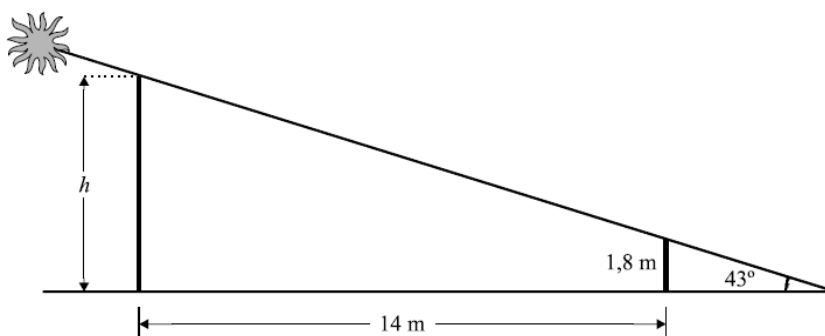
$$\begin{aligned} V_s &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{\overline{DA} \times \overline{DC}}{2} \right) \times \overline{DH} \\ &= \frac{1}{3} \times \left(\frac{2 \times 2}{2} \right) \times 5 \\ &= \frac{10}{3} \\ &\approx 3,3\text{ m}^3 \end{aligned}$$

11. Para determinar a altura (h) de uma antena cilíndrica, o Paulo aplicou o que aprendeu nas aulas de Matemática, porque não conseguia chegar ao ponto mais alto dessa antena.

No momento em que a amplitude do ângulo que os raios solares faziam com o chão era de 43° , parte da sombra da antena estava projetada sobre um terreno irregular e, por isso, não podia ser medida.

Nesse instante, o Paulo colocou uma vara perpendicularmente ao chão, de forma que as extremidades das sombras da vara e da antena coincidissem. A vara, com $1,8\text{ m}$ de altura, estava a 14 m de distância da antena.

Na figura que se segue, que não está desenhada à escala, podes ver um esquema que pretende ilustrar a situação descrita.



Qual é a altura (h) da antena ?

Na tua resposta, indica o resultado arredondado às unidades e a unidade de medida. Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Seja s (em metros) o comprimento da sombra da vara.

Como os triângulos são semelhantes, temos: $\frac{h}{1,8} = \frac{14+s}{s} \Leftrightarrow h = \frac{14+s}{s} \times 1,8$.

Por outro lado, no triângulo rectângulo mais pequeno, temos: $\text{tg } 43^\circ = \frac{1,8}{s} \Leftrightarrow s = \frac{1,8}{\text{tg } 43^\circ}$.

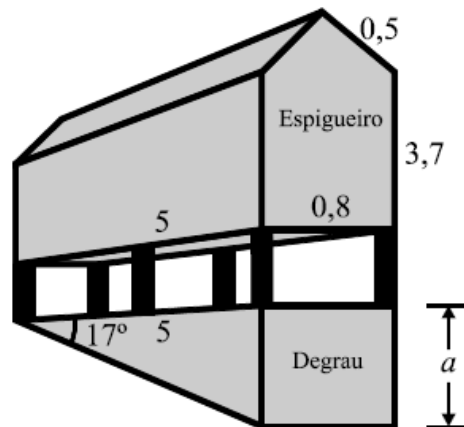
$$\text{Assim, vem } h = \frac{14 + \frac{1,8}{\text{tg } 43^\circ}}{\frac{1,8}{\text{tg } 43^\circ}} \times 1,8 = \frac{14 \text{ tg } 43^\circ + 1,8}{\frac{1,8}{\text{tg } 43^\circ}} \times 1,8 = 14 \text{ tg } 43^\circ + 1,8 \approx 15\text{ m} .$$

12. Os espigueiros são construções que servem para guardar cereais, ao mesmo tempo que os protegem da humidade e dos roedores. Por isso, são construídos sobre estacas (pés do espigueiro), de forma que não estejam em contacto direto com o solo.

Se o terreno for inclinado, os pés do espigueiro assentam num *degrau*, para que o espigueiro fique na horizontal.

A figura é um esquema de um espigueiro. Neste esquema, estão também representados os seis pés do espigueiro, bem como o *degrau* no qual eles assentam.

O esquema não está desenhado à escala. As medidas de comprimento indicadas estão expressas em metros.



- a) O *degrau* onde assentam os pés do espigueiro é um prisma triangular reto. As duas bases deste prisma são triângulos retângulos.

Determina (em metros) a altura, a , do *degrau*.

Apresenta todos os cálculos que efetuares e indica o resultado, arredondado às décimas.

$$\text{Ora, } \sin 17^\circ = \frac{a}{5} \Leftrightarrow a = 5 \sin 17^\circ.$$

Logo, o *degrau* tem $a = 5 \sin 17^\circ \approx 1,5$ metros de altura.

- b) O espigueiro é um prisma pentagonal reto, cujas bases são pentágonos não regulares. Cada pentágono pode ser decomposto num retângulo e num triângulo isósceles.

Determina (em metros cúbicos) o volume do espigueiro.

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Começamos por determinar a altura (em metros) desse triângulo isósceles:

$$h = \sqrt{0,5^2 - 0,4^2} = \sqrt{0,09} = 0,3.$$

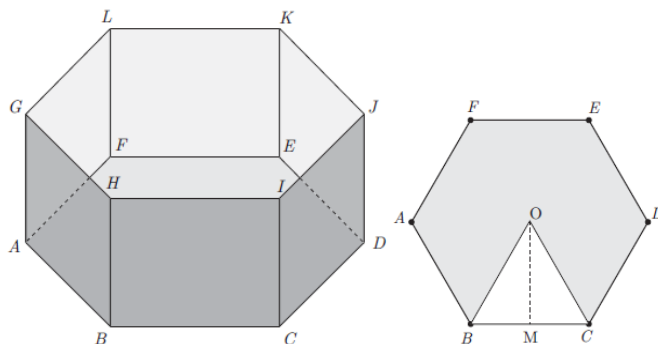
Logo, o volume do espigueiro é:

$$\begin{aligned} V &= \left(0,8 \times 3,7 + \frac{0,8 \times 0,3}{2} \right) \times 5 \\ &= (2,96 + 0,12) \times 5 \\ &= 15,4 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

13. Na figura está representado um esquema da piscina que a mãe da Marta comprou para colocar no jardim, bem como um esquema da base da piscina.

Sabe-se que:

- $[ABCDEFGH I J K L]$ é um prisma regular;
- $\overline{BH} = 1,5 \text{ m}$;
- $[ABCDEF]$ é um hexágono;
- $\overline{BC} = 2 \text{ m}$;
- $\overline{OM} = \sqrt{3} \text{ m}$.

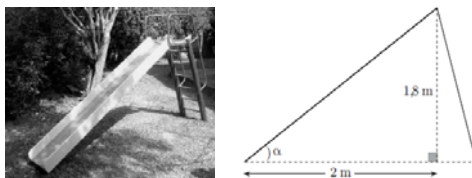


- a) Calcula, em metros cúbicos, a capacidade da piscina.

Apresenta todos os cálculos que efetuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às décimas.

$$\text{A capacidade da piscina é: } V = 6 \times \frac{\overline{BC} \times \overline{OM}}{2} \times \overline{BH} = 6 \times \frac{2 \times \sqrt{3}}{2} \times 1,5 = 9\sqrt{3} \approx 15,6 \text{ m}^3.$$

b) A mãe da Marta vai colocar dentro da piscina um escorrega. A figura representa um esquema do escorrega.



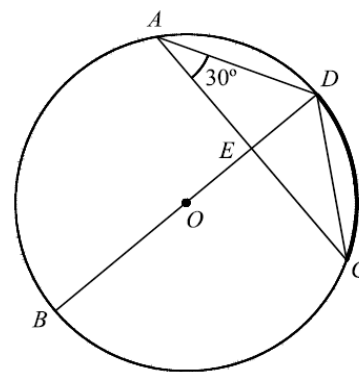
Qual é, em graus, a amplitude do ângulo α ?

Apresenta os cálculos que efetuares e, na tua resposta, escreve o resultado arredondados às unidades.

No triângulo rectângulo, temos: $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1,8}{2} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = 0,9$. Assim, $\alpha = \operatorname{tg}^{-1}(0,9) \approx 42^\circ$.

14. Na figura, está representada uma circunferência, de centro O, em que:

- A, B, C e D são pontos da circunferência;
- o segmento de reta [BD] é um diâmetro;
- E é o ponto de intersecção das retas BD e AC;
- o triângulo [ADE] é retângulo em E;
- $\widehat{CAD} = 30^\circ$.



a) Qual é a amplitude, em graus, do arco menor CD?

Como a amplitude de um ângulo inscrito é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, vem: $\widehat{CD} = 2 \times \widehat{CAD} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$.

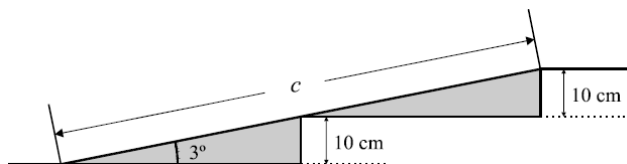
b) Sabendo que $\overline{AD} = 5$, determina $\overline{ED}$.
Apresenta todos os cálculos que efetuares.

No triângulo rectângulo [AED], temos: $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{ED}}{\overline{AD}}$.

Assim, $\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{\overline{ED}}{5} \Leftrightarrow \overline{ED} = 5 \operatorname{sen} 30^\circ \Leftrightarrow \overline{ED} = 5 \times \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{ED} = 2,5$.

15. O acesso a uma das entradas da escola da Rita é feito por uma escada de dois degraus iguais, cada um deles com 10 cm de altura. Com o objetivo de facilitar a entrada na escola a pessoas com mobilidade condicionada, foi construída uma rampa.

Para respeitar a legislação em vigor, esta rampa foi construída de modo a fazer com o solo um ângulo de 3° , como se pode ver no esquema (o esquema não está à escala).



Determina, em metros, o comprimento, c , da rampa.

Indica o resultado arredondado às décimas e apresenta todos os cálculos que efetuares.

Em cada um dos triângulos retângulos, geometricamente iguais, temos: $\operatorname{sen} 3^\circ = \frac{10}{\frac{c}{2}}$.

Assim, $\frac{c}{2} = \frac{10}{\operatorname{sen} 3^\circ} \Leftrightarrow c = \frac{20}{\operatorname{sen} 3^\circ}$. Logo, $c \approx 382,1 \text{ cm}$, ou seja, $c \approx 3,8 \text{ m}$.

16. Arrumaram-se três esferas iguais dentro de uma caixa cilíndrica (figura 1). Como se pode observar no esquema (figura 2):

- A altura da caixa é igual ao triplo do diâmetro de uma esfera;
- O raio da base do cilindro é igual ao raio de uma esfera.

Mostra que:

O volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.

Nota: designa por r o raio da esfera.

O volume da caixa é expresso por:

$$\begin{aligned} V_{\text{Caixa}} &= (\pi \times r^2) \times 6r \\ &= 6\pi r^3 \end{aligned}$$

O volume de uma esfera é expresso por:

$$V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi r^3$$

O volume das três esferas é expresso por:

$$V_{3\text{Esferas}} = 4\pi r^3$$

O volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é expresso por:

$$\begin{aligned} V &= V_{\text{Caixa}} - V_{3\text{Esferas}} \\ &= 6\pi r^3 - 4\pi r^3 \\ &= 2\pi r^3 \end{aligned}$$

Como $V = \frac{V_{3\text{Esferas}}}{2}$, conclui-se que o volume da caixa que não é ocupado pelas esferas é igual a metade do volume das três esferas.

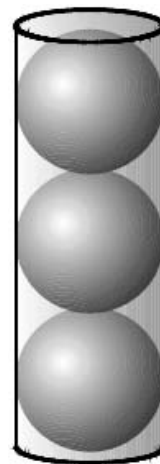


Figura 1

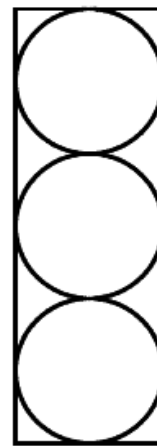


Figura 2

FIM