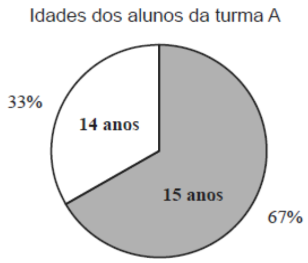
Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução do Teste Intermédio de Matemática (v2 2012)

16/05/2012 **9.º Ano**

Nome: ____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.



a)

A alternativa correta é a **B** ($p \in \left]\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right[$).

Escolhido ao acaso um aluno da turma A, a probabilidade de ele ter 14 anos é $p = f_r(14 \text{ anos}) = 33\% = 0,33$. Logo, $p \in \left]0,25;0,5\right[$.

b)

Turma B

	14 anos	15 anos	16 anos
Raparigas	9	1	4
Rapazes	6	3	3

Como a expressão $\frac{6\times 14+3\times 15+3\times 16}{n}$ representa a média das idades dos rapazes da turma B, então o valor de n é 12, pois o número de rapazes da turma B é $6+3+3=12$.

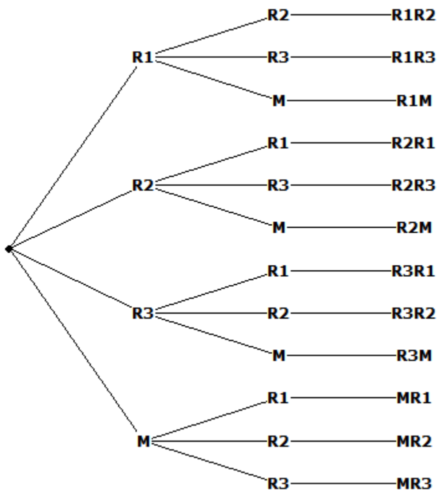
c)

Na turma B, há 4 alunos com 15 anos:
3 rapazes (R_1, R_2 e R_3) e 1 rapariga (M).

Como não interessa a ordem pela qual esses dois alunos são escolhidos, os resultados possíveis são:
$\{R_1,R_2\}$, $\{R_1,R_3\}$, $\{R_2,R_3\}$, $\{R_1,M\}$, $\{R_2,M\}$ e $\{R_3,M\}$.

Assim, o número de casos possíveis é $NCP = 6$ e o número de casos favoráveis é $NCF = 3$.

Logo, a probabilidade de os dois alunos escolhidos serem do mesmo sexo é $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.



Em **alternativa**, poderia recorrer-se a uma tabela de dupla entrada ou a um diagrama de árvore, considerando que esses dois alunos eram escolhidos um a seguir ao outro.
Nesta situação, ainda que o número de casos possíveis e favoráveis duplicasse, obtinha-se ainda o mesmo valor para a probabilidade pedida.

2.

A alternativa correta é a **C** ($-3,14 \in A$).
Note que $-\pi = -3,14159265...$ (dízima infinita não periódica).

3.

Ora, $\left(\frac{1}{25}\right)^3 = \left[\left(\frac{1}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{1}{5}\right)^6 = 5^{-6}$.

Logo, para que a expressão 5^k seja igual a $\left(\frac{1}{25}\right)^3$, o número k é -6 .

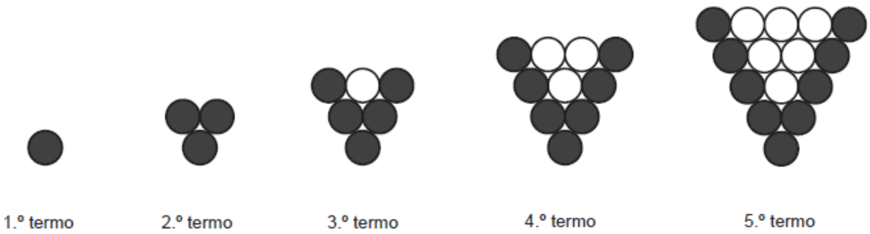
4.

Em cada termo, o número de círculos é igual à soma dos n primeiros números naturais: o primeiro termo (para $n=1$) é formado por 1 círculo; o segundo termo (para $n=2$) é formado por $1+2=3$ círculos; o terceiro termo (para $n=3$) é formado por $1+2+3=6$ círculos; e assim sucessivamente.

Logo, é o 100.º termo dessa sequência que tem um número total de círculos ($1+2+3+...+99+100$) igual à soma dos cem primeiros números naturais.

Por outro lado, em cada termo, o número de círculos pretos é igual ao dobro da ordem do termo decrescido de uma unidade, isto é, o número de círculos pretos do termo de ordem n é dado pela expressão $2n-1$.

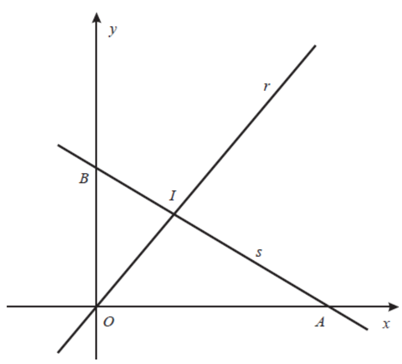
Assim, o centésimo termo tem $2\times 100-1=199$ círculos pretos.



5.

$$
\begin{aligned}
\frac{(x-1)^2}{4}-\frac{1-3x}{2}=1 &\Leftrightarrow \underset{(1)}{\frac{x^2-2x+1}{4}}-\underset{(2)}{\frac{1-3x}{2}}=\underset{(4)}{1}\\
&\Leftrightarrow x^2-2x+1-2+6x=4\\
&\Leftrightarrow x^2+4x-5=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times 1\times(-5)}}{2\times 1}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{16+20}}{2}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm 6}{2}\\
&\Leftrightarrow x=-5 \quad \vee \quad x=1
\end{aligned}
$$

6.



a)

A ordenada do ponto B é $2,7$, pois é o valor do parâmetro b (ordenada na origem) da equação da forma $y=kx+b$ relativa à reta $s: y=-0,6x+2,7$.

Em **alternativa**, pode ser calculada determinando o valor de y correspondente a $x=0$: $y=-0,6\times 0+2,7 \Leftrightarrow y=2,7$. Isto é, como o ponto B tem coordenadas $(0;2,7)$, então a ordenada de B é $2,7$.

b)

A alternativa correta é a **C** ($4,5$).

Comecemos por determinar a abcissa do ponto A, que tem ordenada 0:

$0=-0,6x+2,7 \Leftrightarrow x=\dfrac{2,7}{0,6} \Leftrightarrow x=4,5$. Logo, $\overline{OA}=4,5$.

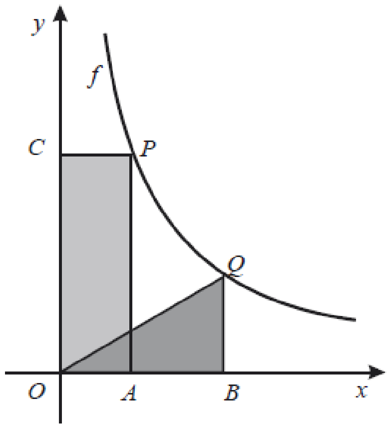
c)

$$
\begin{cases} y=1,2x\\ y=-0,6x+2,7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1,2x\\ 1,2x=-0,6x+2,7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1,2x\\ 1,8x=2,7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1,2x\\ x=\dfrac{2,7}{1,8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1,5\\ y=1,2\times 1,5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1,5\\ y=1,8\end{cases}
$$

Portanto, $I(1,5;1,8)$.

7.

a)



A alternativa correta é a **C** (15).

O ponto P tem coordenadas (x, y), que verificam a relação $y = \frac{15}{x}$, pois esse ponto pertence ao gráfico da função f.

Por outro lado, a área do retângulo [OAPC] é dada por:

$A_{[OAPC]} = \overline{OA} \times \overline{AP} = x \times y$, pois $\overline{OA} = x$ e $\overline{AP} = y$.

Como $y = \frac{50}{x} \Leftrightarrow yx = 15$, então $A_{[OAPC]} = \overline{OA} \times \overline{AP} = x \times y = 15$.

b)

Se $\overline{OB} = 5$, então a abcissa de B e de Q é 5.

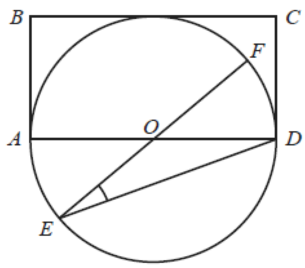
Determinemos a ordenada de Q: $y = \frac{15}{5} \Leftrightarrow y = 3$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [OBQ], temos:

$$\overline{OQ} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{BQ}^2} = \sqrt{5^2 + 3^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}.$$

Logo, o perímetro pedido é: $P_{[OBQ]} = \overline{OB} + \overline{BQ} + \overline{OQ} = 5 + 3 + \sqrt{34} \approx 13{,}8$, arredondado às décimas.

8.



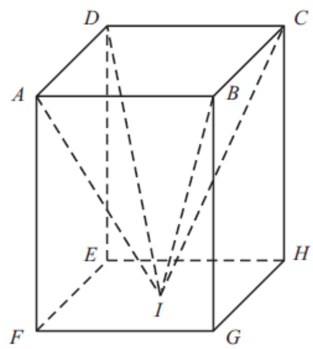
a) Seja r, em centímetros, o comprimento do raio da circunferência.
De acordo com os dados, $\overline{AD} = \overline{BC} = 2r$ e $\overline{AB} = \overline{CD} = r$.
Logo, $P_{[ABCD]} = 2r + 2r + r + r = 6r$.
Como o perímetro do retângulo é 24 cm, temos:
$P_{[ABCD]} = 6r \Leftrightarrow 24 = 6r \Leftrightarrow r = 4$ (em cm).
Logo, o comprimento da circunferência é $P_{\bigcirc} = 2\pi \times 4 = 8\pi \approx 25{,}1$ centímetros.

b) Como a amplitude de um ângulo inscrito numa circunferência é metade da amplitude do arco compreendido entre os seus lados, temos: $\overset{\frown}{FD} = 2 \times D\hat{E}F = 2 \times 20° = 40°$.
Assim, $\overset{\frown}{FA} = \overset{\frown}{DA} - \overset{\frown}{FD} = 180° - 40° = 140°$.
Logo, a rotação de centro O que transforma o ponto F no ponto A tem $140°$ (ou $-220°$) de amplitude.

c)

A alternativa correta é a **D**.
O ponto O pertence à mediatriz do segmento de reta [ED], pois o ponto O é equidistante dos extremos do segmento, visto que $\overline{OE} = \overline{OD}$, já que [OE] e [OD] são raios da mesma circunferência.

9.

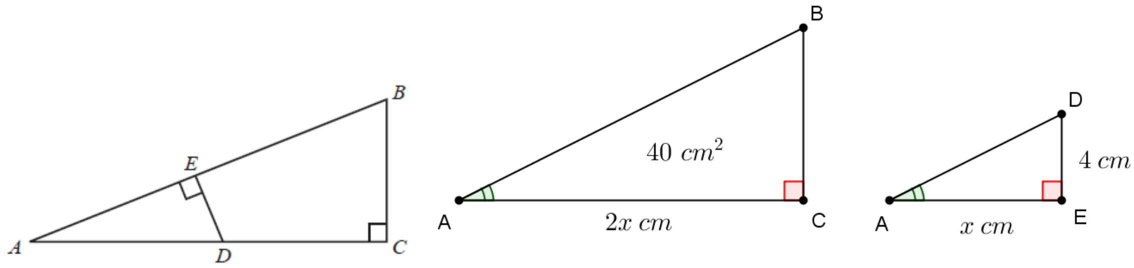


O sólido que se obtém depois de retirada a pirâmide tem $V = 30 - 10 = 20$ cm^3 de volume.

Como se sabe, as expressões $V_{\text{Prisma}} = A_b \times h$ e $V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} A_b \times h$ traduzem o volume do prisma e da pirâmide, respetivamente, em função das suas áreas da base e alturas.

Ora, como o prisma e a pirâmide em questão possuem iguais bases e iguais alturas, então o volume da pirâmide é a terça parte do volume do prisma:
$V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} V_{\text{Prisma}} = \frac{1}{3} \times 30 = 10$ cm^3.

10.



Os triângulos [ABC] e [AED] são semelhantes, pois ambos possuem um ângulo reto e um ângulo agudo (EAD) é comum.

Assim, os lados correspondentes destes triângulos têm comprimentos diretamente proporcionais, isto é:
$\frac{\overline{AC}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$.

Tomando as duas primeiras razões, temos: $\frac{2}{1} = \frac{\overline{BC}}{4} \Leftrightarrow \overline{BC} = 8$.

Como $A_{[ABC]} = 40 \text{ cm}^2$, vem: $\frac{\overline{AC} \times 8}{2} = 40 \Leftrightarrow \overline{AC} = 10$.

Portanto, $\overline{AC} = 10$ cm.

FIM