Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho de Matemática

21/04/2012 **Equações do 2.º grau** **9.º Ano**

Nome: ____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1. Qual das expressões seguintes é equivalente a $(x-1)^2 - x^2$?

[A] -1 **[B]** 1 **[C]** $-2x-1$ **[D]** $-2x+1$ ☑

Ora, $(x-1)^2 - x^2 = x^2 - 2x + 1 - x^2 = -2x + 1$.

2. Qual das expressões seguintes é equivalente a $(x-3)^2 + 8x$?

[A] $x^2 + 14x - 9$ **[B]** $x^2 + 8x + 9$ **[C]** $x^2 + 2x + 9$ ☑ **[D]** $x^2 + 8x - 9$

Ora, $(x-3)^2 + 8x = x^2 - 6x + 9 + 8x = x^2 + 2x + 9$.

3. Considera a expressão $3(x-1)^2 = 0$.
Qual das seguintes equações é equivalente à equação dada, no conjunto dos números reais?

[A] $x^2 - 1 = 0$ **[B]** $x^2 - 2x + 1 = 0$ ☑ **[C]** $x^2 + 1 = 0$ **[D]** $x^2 + 2x + 1 = 0$

Ora, $3(x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$.

4. Qual das expressões é equivalente a $(x-2)^2 + 6x$.

[A] $x^2 + 2x + 4$ ☑ **[B]** $x^2 + 6x + 4$ **[C]** $x^2 + 10x - 4$ **[D]** $x^2 + 6x - 4$

Ora, $(x-2)^2 + 6x = x^2 - 4x + 4 + 6x = x^2 + 2x + 4$.

5. A fatorização da expressão $4x^2 + 4x + 1$ é:

[A] $\left(4x^2 + 1\right)^2$ **[B]** $(2x+1)(2x+1)$ ☑ **[C]** $(2x+1)(2x-1)$ **[D]** $(4x+1)^2$

Ora, $(2x+1)(2x+1) = (2x+1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$.

6. Ao adicionarmos oito unidades ao quadrado do número de gatos que a Catarina tem, obtemos o sêxtuplo do número de gatos.
Assinala a equação que traduz o enunciado do problema.

[A] $x^2 + 8 = 6x$ ☑ **[B]** $8 + 2x = 6$ **[C]** $x^2 + 8 = \frac{1}{6}x$ **[D]** $x^2 + 8 = 6x^2$

7. Classifica a equação $x^2+9=0$, quanto à sua solução.

[A] A equação é possível e determinada.

[B] A equação é possível e indeterminada.

[C] A equação é impossível. ☑

[D] Nenhuma das opções anteriores é correta.

Ora, $x^2+9=0 \Leftrightarrow x^2=-9 \Leftrightarrow x \in \varnothing$ *.*

8. Considera a equação $2x^2-5x+10=0$. Sabendo que $x=\frac{5\pm\sqrt{-55}}{4}$, a equação, em $\mathbb{R}$:

[A] Tem duas soluções distintas.

[B] Tem uma solução.

[C] Tem uma infinidade de soluções.

[D] Não tem solução. ☑

Como $\Delta=-55<0$*, a equação é impossível em* $\mathbb{R}$ *.*

9. O binómio discriminante de uma equação do 2.º grau é -25.
Pode concluir-se que:

[A] A equação tem uma solução real dupla.

[B] A equação é impossível em $\mathbb{R}$. ☑

[C] A equação é possível e determinada.

[D] A equação tem duas soluções reais simétricas.

Como $\Delta=-25<0$*, a equação é impossível em* $\mathbb{R}$ *.*

10. O João tem 14 anos e o Zé tem 13 anos.
Daqui a quantos anos é que a soma dos quadrados das suas idades será igual a 685?
A equação $(14+x)^2+(13+x)^2=685$ traduz a situação apresentada.
O que podes concluir relativamente à solução da equação?

[A] A situação referida no enunciado verificou-se há cinco anos.

[B] A situação referida no enunciado verificar-se-á quando o Zé tiver 26 anos.

[C] A situação referida no enunciado verificar-se-á daqui a 13 anos.

[D] A situação referida no enunciado verificar-se-á quando o João tiver 19 anos. ☑

$(14-5)^2+(13-5)^2=685 \Leftrightarrow 9^2+8^2=685 \Leftrightarrow 145=685$ é uma proposição falsa.

$(14+13)^2+(13+13)^2=685 \Leftrightarrow 27^2+26^2=685 \Leftrightarrow 1405=685$ é uma proposição falsa.

$(14+13)^2+(13+13)^2=685 \Leftrightarrow 27^2+26^2=685 \Leftrightarrow 1405=685$ é uma proposição falsa.

$(14+5)^2+(13+5)^2=685 \Leftrightarrow 19^2+26^2=685 \Leftrightarrow 685=685$ é uma proposição verdadeira.

11. Resolve as seguintes equações, apresentando os cálculos que efetuares:

a)

$$\begin{aligned}
x(x-1)+2x=6-4x^2 &\Leftrightarrow x^2-x+2x-6+4x^2=0\\
&\Leftrightarrow 5x^2+x-6=0\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times5\times(-6)}}{2\times5}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{10}\\
&\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm11}{10}\\
&\Leftrightarrow x=-\frac{6}{5} \quad \vee \quad x=1
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(x+3)^2-3=2x^2+x &\Leftrightarrow x^2+6x+9-3-2x^2-x=0\\ &\Leftrightarrow -x^2+5x+6=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{5^2-4\times(-1)\times 6}}{2\times(-1)}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{49}}{-2}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm 7}{-2}\\ &\Leftrightarrow x=6 \quad\vee\quad x=-1\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}x(x-3)+2x=6 &\Leftrightarrow x^2-3x+2x-6=0\\ &\Leftrightarrow x^2-x-6=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times1\times(-6)}}{2\times1}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{25}}{2}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{1\pm 5}{2}\\ &\Leftrightarrow x=-2 \quad\vee\quad x=3\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}x(-2x-3)=1 &\Leftrightarrow -2x^2-3x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times(-2)\times(-1)}}{2\times(-2)}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{1}}{-4}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{3\pm 1}{-4}\\ &\Leftrightarrow x=-\frac{1}{2} \quad\vee\quad x=-1\end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned}4\left(x^2+x\right)=1-x^2 &\Leftrightarrow 4x^2+4x-1+x^2=0\\ &\Leftrightarrow 5x^2+4x-1=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\times5\times(-1)}}{2\times5}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm\sqrt{36}}{10}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm 6}{10}\\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad\vee\quad x=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned}6x^2+2x=5+x &\Leftrightarrow 6x^2+2x-5-x=0\\ &\Leftrightarrow 6x^2+x-5=0\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times6\times(-5)}}{2\times6}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{121}}{12}\\ &\Leftrightarrow x=\frac{-1\pm 11}{12}\\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad\vee\quad x=\frac{5}{6}\end{aligned}$$

g)

$$\begin{aligned} x^2 = 2(4-x) &\Leftrightarrow x^2 = 8-2x \\ &\Leftrightarrow x^2+2x-8=0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\times 1\times(-8)}}{2\times 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{36}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-2\pm 6}{2} \\ &\Leftrightarrow x=-4 \quad \vee \quad x=2 \end{aligned}$$

h)

$$\begin{aligned} 2\left(x^2-5\right) = 8x &\Leftrightarrow 2x^2-10=8x \\ &\Leftrightarrow 2x^2-8x-10=0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\times 2\times(-10)}}{2\times 2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8\pm\sqrt{144}}{4} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{8\pm 12}{4} \\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad x=5 \end{aligned}$$

i)

$$\begin{aligned} x+(x-1)^2 = 3 &\Leftrightarrow x+x^2-2x+1-3=0 \\ &\Leftrightarrow x^2-x-2=0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\times 1\times(-2)}}{2\times 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1\pm\sqrt{9}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{1\pm 3}{2} \\ &\Leftrightarrow x=-1 \quad \vee \quad x=2 \end{aligned}$$

j)

$$\begin{aligned} \frac{x^2-1}{3} = 1-x &\Leftrightarrow x^2-1=3-3x \\ &\Leftrightarrow x^2+3x-4=0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\times 1\times(-4)}}{2\times 1} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-3\pm 5}{2} \\ &\Leftrightarrow x=-4 \quad \vee \quad x=1 \end{aligned}$$

12. A Rita apresentou aos colegas os seguintes exemplos de uma relação entre números:

$$\begin{aligned} 3^2 &= 2\times 4+1 \\ 11^2 &= 10\times 12+1 \\ 513^2 &= 512\times 514+1 \end{aligned}$$

a) Dá outro exemplo em que se mantenha esta relação numérica.

Por exemplo: $10^2 = 9\times 11+1$.

b) O João acha que esta relação é uma coincidência. A Rita, para lhe provar que a relação é válida para qualquer número a, começou por escrever a seguinte igualdade que traduz a relação em linguagem matemática:

$$a^2 = (a-1)(a+1)+1$$

Mostra que a igualdade é sempre verdadeira.

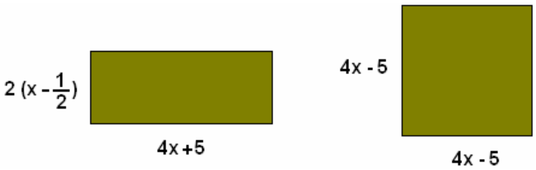
Ora, $(a-1)(a+1)+1 = (a^2-1)+1 = a^2-1+1 = a^2$*, para todo o* a *real.*

13. Seja b um número real.

Determina os valores de b para os quais a equação $x^2+bx+9=0$ tem apenas uma solução.
Apresenta os cálculos que efetuares.

Para que a equação tenha apenas uma solução real, terá de ser $\Delta = 0$.
Como $\Delta = b^2 - 4\times 1\times 9 = b^2-36$*, temos:* $\Delta = 0 \Leftrightarrow b^2-36=0 \Leftrightarrow b^2=36 \Leftrightarrow b=-6 \vee b=6$.

14. O Senhor José ofereceu dois terrenos aos seus dois filhos. Os terrenos têm dimensões diferentes, mas a área é a mesma. Atendendo às medidas assinaladas na figura, determina o valor de x de modo a que os dois irmãos fiquem com terrenos de igual área.



Equacionando o problema e resolvendo a equação, temos:

$$2\left(x-\frac{1}{2}\right)(4x+5) = (4x-5)^2 \Leftrightarrow (2x-1)(4x+5) = 16x^2-40x+25$$

$$\Leftrightarrow 8x^2+10x-4x-5-16x^2+40x-25=0$$

$$\Leftrightarrow -8x^2+46x-30=0$$

$$\Leftrightarrow -4x^2+23x-15=0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-23\pm\sqrt{23^2-4\times(-4)\times(-15)}}{2\times(-4)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-23\pm\sqrt{289}}{-8}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-23\pm 17}{-8}$$

$$\Leftrightarrow x=5 \quad \vee \quad x=\frac{3}{4}$$

A solução $\frac{3}{4}$ *da equação não é solução do problema, pois implicaria um valor negativo para o comprimento do lado do terreno da direita. Já a solução* 5 *da equação é a solução do problema, pois obtém-se:*

$2\left(5-\frac{1}{2}\right)(4\times 5+5) = (4\times 5-5)^2 \Leftrightarrow 9\times 25 = 15^2 \Leftrightarrow 225 = 225$, que é uma proposição verdadeira.

15. Chama-se **distância de paragem** à distância percorrida por um veículo entre o momento em que o condutor vê um obstáculo e o veículo se imobiliza. Para calcular a distância de paragem (D_p), em metros, utiliza-se a seguinte fórmula:

$$D_p = 0{,}3v + \frac{v^2}{200} \qquad \text{em que } v \text{ é a velocidade em km/h.}$$

O Rui percorria um troço da A24 quando reparou que, alguns metros à sua frente, tinha havido um acidente que ocupava todas as vias da faixa de rodagem.

Quando o carro parou, o Rui estimou em 40,5 metros a distância que percorreu desde o momento em que avistou o acidente. Será que o Rui circulava em excesso de velocidade? Apresenta os cálculos que efetuares.

Substituindo na fórmula D_p *por* $40{,}5$ *, temos:*

$$40{,}5 = 0{,}3v + \frac{v^2}{200} \Leftrightarrow 8100 = 60v + v^2$$

$$\Leftrightarrow v^2 + 60v - 8100 = 0$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{-60 \pm \sqrt{60^2 - 4 \times 1 \times (-8100)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{-60 \pm \sqrt{36000}}{2}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{-60 \pm \sqrt{3600 \times 10}}{2}$$

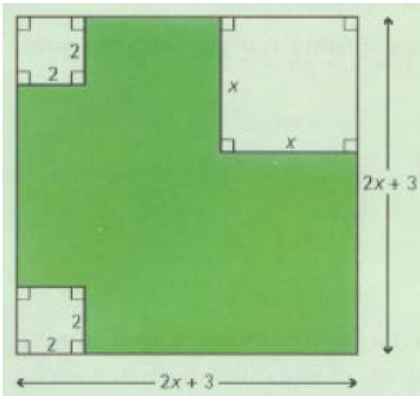
$$\Leftrightarrow v = \frac{-60 \pm 60\sqrt{10}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -30 - 30\sqrt{10} \quad \vee \quad x = -30 + 30\sqrt{10}$$

A solução $-30 - 30\sqrt{10}$ *da equação não é solução do problema, pois é um valor negativo.*
Como $-30 + 30\sqrt{10} \approx 64{,}9$ *, conclui-se que o Rui circulava, aproximadamente, a 65 Km/h, portanto, dentro dos limites legais estabelecidos.*

16. Num parque quadrado, a área ajardinada é 136 dam^2 (a verde mais escuro na figura).

Calcula as dimensões do parque.
(unidade: decâmetro)



Equacionando o problema e resolvendo a equação, temos:

$$x^2 + 2 \times 2^2 + 136 = (2x + 3)^2 \Leftrightarrow x^2 + 8 + 136 = 4x^2 + 12x + 9$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 12x - 135 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \times 3 \times (-135)}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm \sqrt{1764}}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-12 \pm 42}{6}$$

$$\Leftrightarrow x = -9 \quad \vee \quad x = 5$$

A solução -9 *da equação não é solução do problema, pois implicaria um valor negativo para comprimento.*
Portanto, o parque tem $2 \times 5 + 3 = 13$ *decâmetros de lado.*

17. Equaciona e resolve o seguinte problema:

A Maria é 11 anos mais nova do que a sua amiga Inês.
O produto das idades das duas é 60.
Que idade tem a Inês?

Seja x *a idade da Inês (em anos).*
Equacionando o problema e resolvendo a equação, temos:

$$x(x - 11) = 60 \Leftrightarrow x^2 - 11x - 60 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{(-11)^2 - 4 \times 1 \times (-60)}}{2}$$

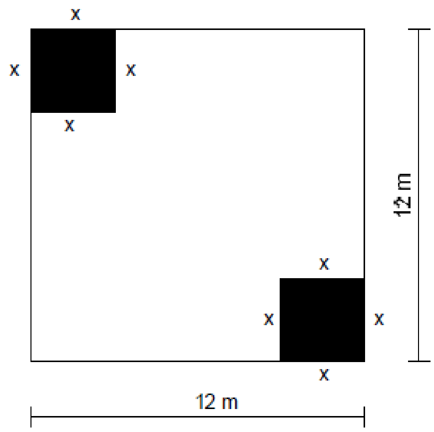
$$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm \sqrt{361}}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{11 \pm 19}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = -4 \quad \vee \quad x = 15$$

Portanto, a Inês tem 15 anos.

18. A figura representa um *hall* quadrado de um hotel, com 12 metros de lado, coberto a mármore branco e preto.
Sabe-se que a área ocupada pelo mármore branco é sete vezes a área ocupada pelo mármore preto.
Calcula o valor de x (em metros).



Equacionando o problema e resolvendo a equação, temos:

$$2x^2 + 7 \times 2x^2 = 12^2 \Leftrightarrow 16x^2 = 144$$
$$\Leftrightarrow x^2 = 9$$
$$\Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$$

Como x designa um comprimento, a solução negativa da equação não é solução do problema. *Portanto,* $x = 3$.

FIM