

Escola Secundária/2,3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Ficha de Trabalho de Matemática

23/01/2012

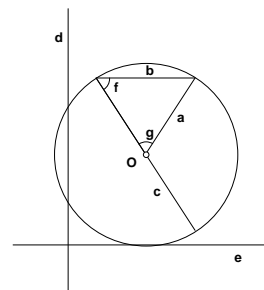
Circunferência e polígonos; Rotações.

9.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1. Coloca, na figura, pela letra conveniente, os elementos mencionados da circunferência:

- raio – a
- corda – b
- diâmetro – c
- secante – d
- tangente – e
- ângulo inscrito – f
- ângulo ao centro – g

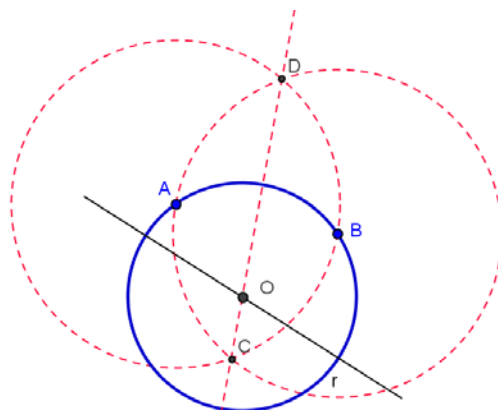


Apresenta-se ao lado uma resposta possível.

2. Recorrendo a material de desenho e de medição, constrói, a lápis, a circunferência cujo centro é um ponto da reta r e que passa pelos pontos A e B.

Não apagues as linhas auxiliares que traçares para construíres a circunferência.

Descreve e explica a construção apresentada.

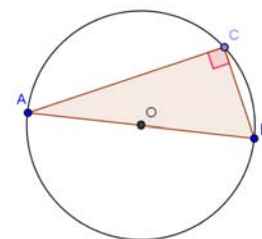


3. Sejam A, B e C três pontos distintos de uma circunferência, em que o arco AB tem 180° de amplitude.

Justifica a seguinte afirmação:

«O triângulo [ABC] não é equilátero.»

O ângulo ACB é reto, pois é um ângulo inscrito num arco de semicircunferência. Consequentemente, o triângulo [ABC] é retângulo, pelo que não é equilátero, pois não pode ser equiângulo.



4. Na figura ao lado, está representada uma circunferência, de centro O, em que:

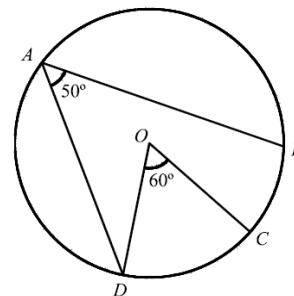
- A, B, C e D são pontos da circunferência;
- $\widehat{DAB} = 50^\circ$;
- $\widehat{DOC} = 60^\circ$.

Qual é, em graus, a amplitude do arco CB?

Tendo em consideração que o ângulo BAD é um ângulo inscrito e o ângulo COD é um ângulo ao centro, tem-se:

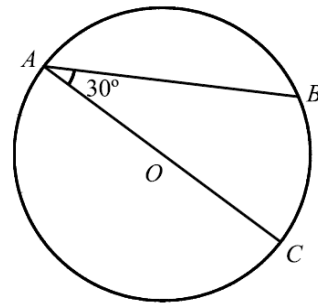
$$\widehat{BAD} = \frac{\widehat{BD}}{2} \text{ e } \widehat{COD} = \widehat{CD}, \text{ donde } \widehat{BD} = 2 \times \widehat{BAD} = 2 \times 50^\circ = 100^\circ \text{ e } \widehat{CD} = \widehat{COD} = 60^\circ .$$

$$\text{Logo, } \widehat{CB} = \widehat{DB} - \widehat{DC} = 100^\circ - 60^\circ = 40^\circ .$$



5. Na figura, está representada uma circunferência, de centro O, em que:

- A, B e C são pontos da circunferência;
- o segmento de reta [AC] é um diâmetro;
- $\widehat{OAB} = 30^\circ$.



a) Qual é a amplitude, em graus, do arco menor AB?

Tendo em consideração que o ângulo BAC é um ângulo inscrito, será

$$\widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}, \text{ donde } \widehat{BC} = 2 \times \widehat{BAC} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ.$$

$$\text{Logo, } \widehat{AB} = \widehat{AC} - \widehat{BC} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ.$$

b) Considera uma reta tangente à circunferência no ponto A. Seja D um ponto pertencente a essa reta.

Sabendo que o ângulo BAD é agudo, determina a sua amplitude (em graus). Justifica a tua resposta.

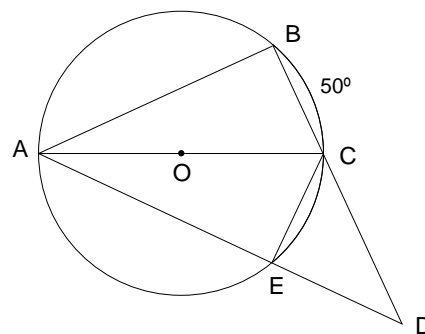
(Começa por elaborar a construção referida.)

Dado que o ângulo BAD é agudo, resulta que os ângulos BAD e BAC são complementares, pois a reta tangente à circunferência no ponto A é perpendicular à reta AO (reta que contém o ponto de tangência e o centro da circunferência).

$$\text{Assim, } \widehat{BAD} = 90^\circ - \widehat{BAC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ.$$

6. Observa a figura ao lado, onde:

- A, B, C e E são pontos da circunferência, de centro O;
- [AC] é um diâmetro da circunferência;
- D é o ponto de interseção das retas BC e AE;
- $\widehat{BC} = 50^\circ$;
- $\overline{BC} = \overline{EC}$.



a) Justifica que $\widehat{BC} = \widehat{CE}$.

Numa circunferência, a cordas geometricamente iguais correspondem

arcos geometricamente iguais. Como $[BC] \cong [CE]$, então $\text{Arco } BC \cong \text{Arco } CE$ e, conseqüentemente, $\widehat{BC} = \widehat{CE}$.

b) Justifica que o triângulo [CDE] é retângulo.

O ângulo AEC é reto, pois é um ângulo inscrito num arco de semicircunferência (arco AEC).

Como os ângulos AEC e CED são complementares, resulta que o ângulo CED é também reto.

Logo, o triângulo [CDE] é retângulo em E.

c) Justificando, determina \widehat{AOE} e \widehat{ADB} .

Ora, $\widehat{CE} = \widehat{BC} = 50^\circ$ (dado).

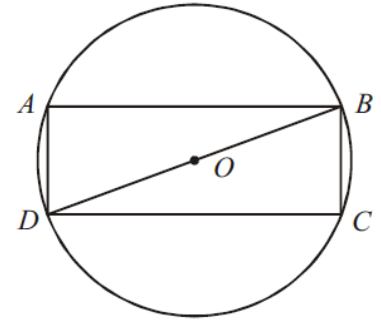
Como o $\angle AOE$ é um ângulo ao centro, será $\widehat{AOE} = \widehat{AE}$. Logo, $\widehat{AOE} = \widehat{AE} = \widehat{AEC} - \widehat{EC} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$.

O ângulo ABC é reto, pois é um ângulo inscrito num arco de semicircunferência.

Quanto aos ângulos inscritos BAC e CAE, tem-se: $\widehat{BAC} = \widehat{CAE} = \frac{\widehat{CE}}{2} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$.

Dado que a soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo é 180° , resulta (em relação ao triângulo [ABD]): $\widehat{ADB} = 180^\circ - (\widehat{ABD} + \widehat{BAD}) = 180^\circ - (90^\circ + 50^\circ) = 40^\circ$.

9. Na figura, está representada uma circunferência de centro O, na qual está inscrito um retângulo [ABCD].
A figura não está desenhada à escala.
Sabe-se que:



- $\widehat{BDA} = 70^\circ$;
- $\overline{AB} = 4,35 \text{ cm}$.

- a) Qual é a amplitude, em graus, do arco AB?

Relativamente ao ângulo inscrito BDA, tem-se: $\widehat{BDA} = \frac{\widehat{AB}}{2}$.

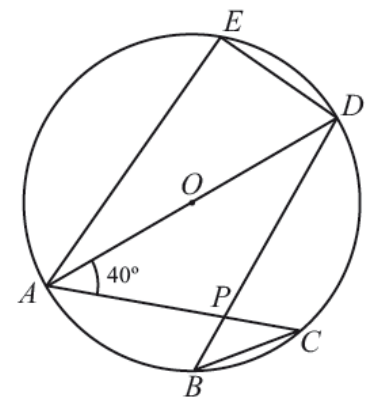
Logo, $\widehat{AB} = 2 \times \widehat{BDA} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ$.

- b) Quantos eixos de simetria tem o retângulo [ABCD]?

O retângulo [ABCD] tem dois eixos de simetria (as mediatrizes dos lados [AB] e [AD]).

10. Na figura, está representada uma circunferência de centro no ponto O.
Sabe-se que:

- os pontos A, B, C, D e E pertencem à circunferência;
- [AD] é um diâmetro da circunferência;
- o ponto P é o ponto de interseção dos segmentos de reta [AC] e [BD];
- $\widehat{CAD} = 40^\circ$.



A figura não está à escala.

- a) Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- [A] O ponto O pertence à mediatriz do segmento [AP].
[B] O ponto O pertence à mediatriz do segmento [BC].
[C] O ponto B pertence à mediatriz do segmento [BC].
[D] O ponto B pertence à mediatriz do segmento [AP].

- b) Qual é a amplitude, em graus, do arco AC?
Mostra como chegaste à tua resposta.

Relativamente ao ângulo inscrito DAC, tem-se: $\widehat{DAC} = \frac{\widehat{CD}}{2}$. Logo, $\widehat{CD} = 2 \times \widehat{DAC} = 2 \times 40^\circ = 80^\circ$.

Assim, temos $\widehat{AC} = \widehat{AD} - \widehat{CD} = 180^\circ - 80^\circ = 100^\circ$.

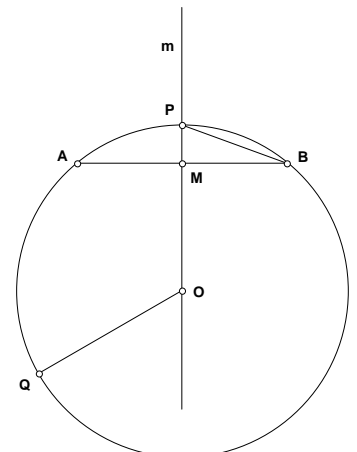
11. A, B, P e Q são pontos da circunferência, de centro O. Considera ainda:

- m é a mediatriz do segmento de reta [AB];
- $P \in m$;
- $\overline{OQ} = 5 \text{ cm}$;
- $\overline{OM} = 4 \times \overline{PM}$.

- a) Justifica que a mediatriz da corda [AB] passa pelo centro da circunferência.

A mediatriz de um segmento de reta é o lugar geométrico dos pontos do plano equidistantes dos extremos do segmento.

Ora, $\overline{OA} = \overline{OB}$, pois [AO] e [OB] são raios da mesma circunferência. Logo, o ponto O pertence à reta m , mediatriz da corda [AB].



b) Determina o perímetro e a área do triângulo [BMP].

Sabe-se que $\overline{OP} = \overline{OQ} = 5 \text{ cm}$ e $\overline{OM} = 4 \times \overline{PM}$.

Considerando $\overline{OM} = x$ e $\overline{PM} = y$, temos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y + y = 5 \\ x = 4y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 4 \end{cases} . \text{ Logo, } \overline{OM} = 4 \text{ cm e } \overline{PM} = 1 \text{ cm} .$$

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [OMB], temos: $\overline{MB} = \sqrt{5^2 - 4^2} = \sqrt{9} = 3$.

Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [MPB], temos: $\overline{PB} = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$.

Portanto, $P_{[BMP]} = 3 + 1 + \sqrt{10} = (4 + \sqrt{10}) \text{ cm}$ e $A_{[PMB]} = \frac{\overline{MB} \times \overline{MP}}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = 1,5 \text{ cm}^2$.

c) Admite que o segmento [PB] é o lado de um decágono regular.

Qual é a amplitude do seu ângulo interno?

Explica o teu raciocínio.

(Começa por esboçar o referido decágono regular)

Admitindo que o segmento [PB] é o lado de um decágono regular, conclui-se que o ângulo inscrito APB é um dos dez ângulos internos (geometricamente iguais) do referido decágono regular.

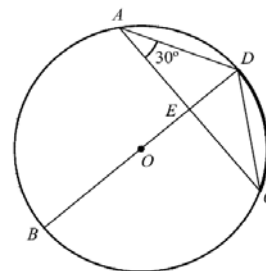
Ora, como os lados desse decágono regular são cordas geometricamente iguais da mesma circunferência,

correspondem-lhes arcos geometricamente iguais, cuja amplitude é $\widehat{AP} = \widehat{PB} = \dots = \frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

Assim, a amplitude do seu ângulo interno é $\widehat{APB} = \frac{\widehat{AQB}}{2} = \frac{8 \times \widehat{AP}}{2} = 4 \times 36^\circ = 144^\circ$.

12. Na figura, está representada uma circunferência, de centro O, em que:

- A, B, C e D são pontos da circunferência;
- o segmento de reta [BD] é um diâmetro;
- E é o ponto de interseção das retas BD e AC;
- o triângulo [ADE] é retângulo em E;
- $\widehat{CAD} = 30^\circ$.



a) Qual é a amplitude, em graus, do arco menor CD?

Relativamente ao ângulo inscrito DAC, tem-se: $\widehat{DAC} = \frac{\widehat{CD}}{2}$. Logo, $\widehat{CD} = 2 \times \widehat{DAC} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$.

b) Sem efetuares medições, explica por que é que a seguinte afirmação é verdadeira.

«Os triângulos [ADE] e [CDE] são geometricamente iguais.»

Como se sabe, qualquer reta que passe no centro da circunferência divide ao meio as cordas que lhe são perpendiculares, assim como os ângulos ao centro e os arcos correspondentes.

Assim, tem-se: $[AE] \cong [CE]$, $\sphericalangle AED \cong \sphericalangle CED$ e o lado [ED] é comum aos triângulos retângulos [ADE] e [CDE].

Logo, estes triângulos são geometricamente iguais, pois possuem dois lados geometricamente iguais, cada um a cada um, bem como geometricamente iguais os ângulos formados por estes lados (LAL).

c) Sabendo que $\overline{AD} = 6$ e $\overline{AC} = 6\sqrt{3}$, determina \overline{ED} .

Apresenta todos os cálculos que efetuares.

Como $\overline{AE} = \overline{EC} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$, aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [AED], temos:

$$\overline{ED} = \sqrt{6^2 - (3\sqrt{3})^2} = \sqrt{36 - 9 \times 3} = \sqrt{9} = 3 .$$

Nota que este resultado poderia ter sido obtido por análise dos dados do problema:

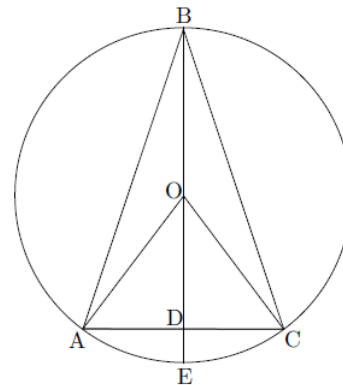
As cordas [AD] e [CD] são dois dos lados de um hexágono regular inscrito na circunferência, o qual poderá ser decomposto em 6 triângulos equiláteros geometricamente iguais a [AOD]. Ora, a reta AC contém a mediatriz do lado [OD] deste triângulo, pelo que o ponto E é o ponto médio deste lado.

Assim, $\overline{OE} = \overline{ED} = \frac{\overline{OD}}{2} = \frac{6}{2} = 3$.

13. Na figura, sabe-se que:

- O é o centro da circunferência;
- [AB] e [BC] são cordas geometricamente iguais;
- D é o ponto de interseção do diâmetro [EB] com a corda [AC].

A figura não está construída à escala.



a) Qual é, em graus, a amplitude do arco AC, supondo que $\widehat{ABC} = 28^\circ$?

Relativamente ao ângulo inscrito ABC, tem-se: $\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2}$.

Logo, $\widehat{AC} = 2 \times \widehat{ABC} = 2 \times 28^\circ = 56^\circ$.

b) Qual é, em centímetros, a medida do comprimento de [DE], supondo que $\overline{AO} = 6,8 \text{ cm}$ e $\overline{AC} = 6,4 \text{ cm}$? Apresenta os cálculos que efetuares.

Começamos por provar que o ângulo ADO é reto, mostrando que a reta EB é a mediatriz da corda [AC]:

Ora, $\overline{AO} = \overline{CO}$, pois [AO] e [CO] são raios da mesma circunferência; $\overline{AB} = \overline{CB}$, pois [AB] e [CB] são cordas geometricamente iguais da mesma circunferência (dado).

Logo, a reta EB é a mediatriz da corda [AC], pois os pontos O e B são dois pontos da reta EB equidistantes dos extremos do segmento [AC].

Como $\overline{AD} = \overline{DC} = \frac{\overline{AC}}{2} = \frac{6,4}{2} = 3,2 \text{ cm}$ (D é o ponto médio de [AC] – Porquê?), aplicando o teorema de

Pitágoras no triângulo retângulo [AOD], temos: $\overline{OD} = \sqrt{6,8^2 - 3,2^2} = \sqrt{46,24 - 10,24} = \sqrt{36} = 6 \text{ cm}$.

Logo, $\overline{DE} = \overline{OE} - \overline{OD} = \overline{OA} - \overline{OD} = 6,8 - 6 = 0,8 \text{ cm}$. ($\overline{OA} = \overline{OE}$, porquê?)

14. Na figura está representada uma circunferência.

Sabe-se que:

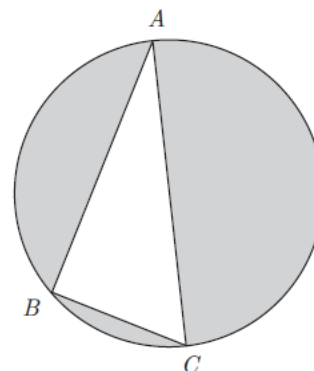
- [AC] é um diâmetro de comprimento 15;
- B é um ponto da circunferência;
- $\overline{AB} = 12$.

a) Justifica que o triângulo [ABC] é retângulo em B.

O triângulo [ABC] é retângulo em B, pois o ângulo ABC é reto, visto ser um ângulo inscrito num arco de semicircunferência (arco ABC).

b) Calcula a área da região sombreada da figura.

Apresenta os cálculos que efetuaste e, na tua resposta, escreve o resultado arredondado às unidades.



Aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [ABC], temos: $\overline{BC} = \sqrt{15^2 - 12^2} = \sqrt{81} = 9$.

Logo, a área pedida é: $A_S = A_O - A_{[ABC]} = \pi \times 7,5^2 - \frac{12 \times 9}{2} = 56,25 \times \pi - 54 \approx 123 \text{ u.a.}$

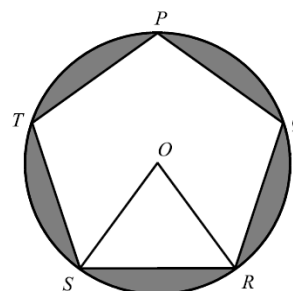
15. Na figura está representada uma circunferência de centro O, em que está inscrito um pentágono regular [PQRST].

a) Qual é a amplitude, em graus, do ângulo TPQ? Apresenta todos os cálculos que efetuaste.

Como o pentágono é regular, os seus lados são cordas geometricamente iguais. Logo, os arcos correspondentes são também geometricamente iguais, cuja

amplitude é $\widehat{TP} = \widehat{PQ} = \dots = \widehat{ST} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Como o ângulo TPQ é inscrito, resulta: $\widehat{TPQ} = \frac{\widehat{TSQ}}{2} = \frac{3 \times 72^\circ}{2} = 108^\circ$.



b) Admite que:

- a circunferência tem raio 15;
- o triângulo [SOR] tem área 107.

Determina a área da região sombreada.

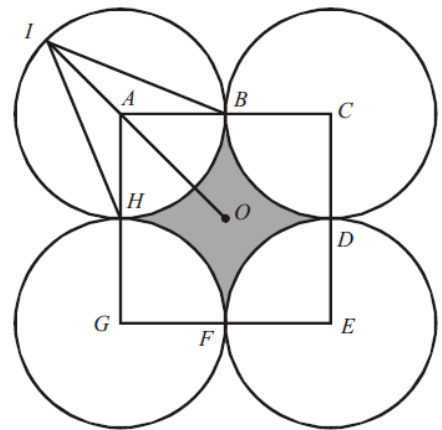
Apresenta todos os cálculos que efetuaste e indica o resultado arredondado às décimas.

Considerando os valores admitidos, a área pedida é:

$$A_S = A_O - 5 \times A_{\{SOR\}} = \pi \times 15^2 - 5 \times 107 = 225 \times \pi - 535 \approx 171,9 \text{ u.a.}$$

16. Relativamente à figura, sabe-se que:

- [ACEG] é um quadrado de lado 4 e centro O;
- os pontos B, D, F e H são os pontos médios dos lados do quadrado [ACEG];
- os vértices do quadrado [ACEG] são os centros das circunferências representadas na figura;
- o raio de cada uma das circunferências é 2;
- o ponto I pertence à circunferência de centro no ponto A;
- o ponto A pertence ao segmento de reta [IO].



a) Qual é a amplitude, em graus, do ângulo BIH?

Como o ângulo ao centro HAB é reto, então $\widehat{HB} = \widehat{HAB} = 90^\circ$.

Logo, a amplitude do ângulo inscrito BIH é: $\widehat{BIH} = \frac{\widehat{HB}}{2} = 45^\circ$.

b) Determina a área da região sombreada.

Apresenta os cálculos que efetuaste.

Escreve o resultado arredondado às décimas.

Como as 4 circunferências são geometricamente iguais, a área do quadrado [ACEG] pode ser decomposta em a área da região sombreada e a área de 4 quartos de um dos círculos (esta última equivalente à área de um dos círculos).

Assim, a área pedida é $A_S = A_{\{ACEG\}} - A_O = 4^2 - \pi \times 2^2 = 16 - 4\pi \approx 3,4 \text{ u.a.}$

c) Determina o comprimento de [IO].

Apresenta os cálculos que efetuaste.

Escreve o resultado arredondado às décimas.

[IA] é um raio de uma das circunferências e [AO] é a hipotenusa do triângulo retângulo [AHO].

Logo, aplicando o teorema de Pitágoras neste triângulo, temos: $\overline{AO} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

Assim, $\overline{IO} = \overline{IA} + \overline{AO} = 2 + 2\sqrt{2} \approx 4,8 \text{ u.c.}$

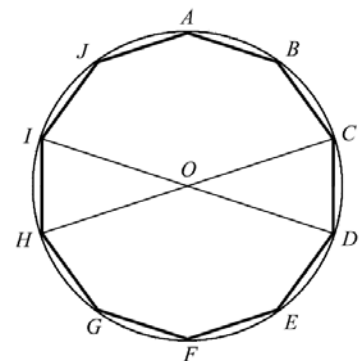
17. Na figura, está representado um decágono regular [ABCDEFGHIJ], inscrito numa circunferência de centro O.

Os segmentos de reta [ID] e [HC] são diâmetros desta circunferência.

a) Após uma rotação de centro O e amplitude 144° (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), o ponto A desloca-se para uma posição que, antes da rotação, era ocupada por outro ponto. De que ponto se trata?

Como o decágono é regular, o ângulo ao centro correspondente a cada um dos seus lados tem de amplitude $\frac{360^\circ}{10} = 36^\circ$.

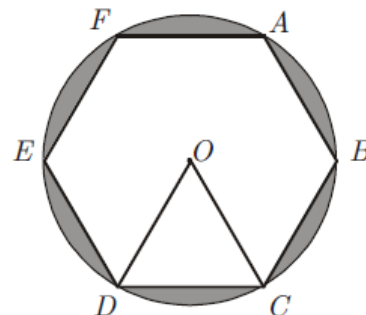
Como $144^\circ = 4 \times 36^\circ$, nessa rotação o ponto A vai ocupar a posição que era ocupada pelo ponto G.



- b) Ao observar a figura, a Rita afirmou:
 «A amplitude do ângulo CDI é igual à amplitude do ângulo CHI.»
 Uma vez que a Rita não tinha transferidor, como é que ela poderá ter chegado a esta conclusão?
 Justifica a tua resposta.

Os ângulos considerados são ângulos inscritos que compreendem o mesmo arco entre os seus lados, pelo que serão geometricamente iguais e, por isso, com igual amplitude: $\widehat{CDI} = \widehat{CHI} = \frac{\widehat{CAI}}{2} = \frac{4 \times 36^\circ}{2} = 72^\circ$.

18. Na figura, está representada uma circunferência de centro no ponto O, na qual está inscrito um hexágono regular [ABCDEF].



- a) Qual é a amplitude, em graus, do ângulo DOC?

Como o hexágono é regular, os seus lados são cordas geometricamente iguais. Logo, os arcos correspondentes são também geometricamente iguais, cuja amplitude é $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \dots = \widehat{FA} = \frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$.

Como DOC é um ângulo ao centro, resulta: $\widehat{DOC} = \widehat{CD} = 60^\circ$.

- b) Relativamente à figura, sabe-se ainda que:

- a circunferência tem raio 4;
- o triângulo [DOC] tem área $4\sqrt{3}$.

Determina a área da região sombreada.

Escreve o resultado arredondado às unidades. Apresenta os cálculos que efetuaste.

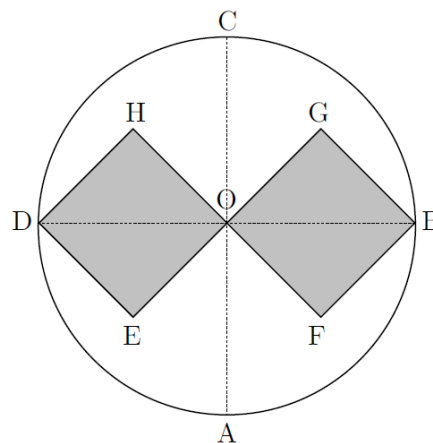
A área sombreada é: $A_s = A_O - 6 \times A_{DOC} = \pi \times 4^2 - 6 \times 4\sqrt{3} = 16\pi - 24\sqrt{3} \approx 8,7 \text{ u.a.}$

- c) Considera a rotação de centro no ponto O e de amplitude 240° (sentido contrário ao dos ponteiros do relógio). Qual é a imagem do ponto D obtida por meio dessa rotação?

Como $240^\circ = 4 \times 60^\circ$, nessa rotação a imagem do ponto D é o ponto F.

19. Na figura, sabe-se que:

- o diâmetro [BD] é perpendicular ao diâmetro [AC];
- [OHDE] e [OFBG] são quadrados geometricamente iguais;
- O ponto O é o centro do círculo;
- $\overline{OC} = 2 \text{ cm}$.



- a) Qual é, em graus, a amplitude do ângulo ACB?

Como os diâmetros [AC] e [BD] são perpendiculares, então $\widehat{AB} = \widehat{A\hat{O}B} = 90^\circ$. Logo, o ângulo inscrito ACB tem de amplitude

$$\widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2} = \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

- b) De entre as transformações geométricas indicadas nas alternativas seguintes, assinala a que não contempla corretamente a afirmação que se segue.

O quadrado [OHDE] é a imagem do quadrado [OFBG], através da transformação geométrica definida por uma:

- [A] rotação de centro no ponto O e amplitude 180° .
- [B] rotação de centro no ponto O e amplitude -180° .
- [C] simetria axial de eixo AC.
- [D] simetria axial de eixo DB.

- c) Determina o **valor exato**, em centímetros, da medida do lado do quadrado [OFBG]. Apresenta os cálculos que efetuares.

[OB] é um raio da circunferência e diagonal do quadrado [OFBG].

Assim, considerando $\overline{OG} = \overline{GB} = x$ e aplicando o teorema de Pitágoras no triângulo retângulo [OGB], temos:

$$x^2 + x^2 = 2^2 \Leftrightarrow 2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2. \text{ Como } x > 0, \text{ então } x = \sqrt{2}.$$

Portanto, a medida do lado do quadrado [OFBG] é $\sqrt{2}$ cm.