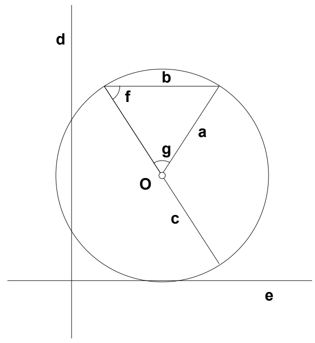
Escola Secundária/3 da Sé-Lamego
Proposta de Resolução da Chamada Escrita de Matemática
28/02/2002 **Turma C** **9.º Ano**

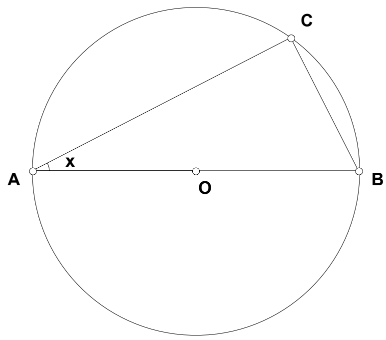
Nome: ____ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1. Coloca, na figura, pela letra conveniente, os elementos mencionados da circunferência:

- raio – **a**
- corda – **b**
- diâmetro – **c**
- secante – **d**
- tangente – **e**
- ângulo inscrito – **f**
- ângulo ao centro – **g**



2. Na circunferência de centro O, <u>o comprimento do arco AC é duplo do comprimento do arco BC</u>.



a) O triângulo [ABC] é:

[A] isósceles **[B]** rectângulo
[C] acutângulo **[D]** obtusângulo

*Resposta **[B]**, pois todo o ângulo inscrito numa semi-circunferência é recto, visto compreender entre os seus lados um arco de 180º de amplitude.*

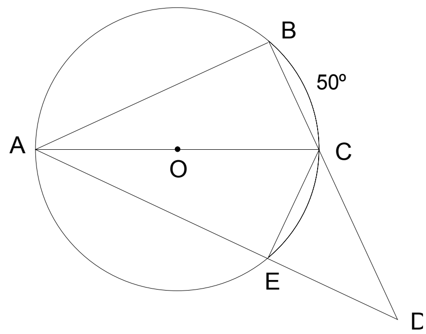
b) Assiná-la a(s) afirmação(ões) verdadeira(s):

[A] $A\hat{B}C = 90º - x$ **[B]** $A\hat{B}C = 2x$
[C] $A\hat{C}B = 3x$ **[D]** $A\hat{B}C = C\hat{O}B$

Todas as afirmações são verdadeiras.(PORQUÊ?[(1)])

3. Observa atentamente a figura ao lado, onde:

- [AC] é um diâmetro da circunferência de centro O;
- $\overset{\frown}{BC} = 50º$;
- $\overline{BC} = \overline{EC}$.



a) Justifica que $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CE}$.

Numa circunferência ou em circunferências geometricamente iguais, a cordas geometricamente iguais correspondem arcos geometricamente iguais. Logo, como $\overline{BC} = \overline{EC}$ então $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{CE}$.

b) Justifica que o triângulo [CDE] é rectângulo.

O ângulo AEC é recto, pois é um ângulo inscrito num arco de semi-circunferência. Logo, também o ângulo CED é recto, visto estes dois ângulos serem adjacentes suplementares. Consequentemente, o triângulo [CDE] é rectângulo.

c) Justificando, determina $A\hat{O}E$ e $A\hat{D}B$.

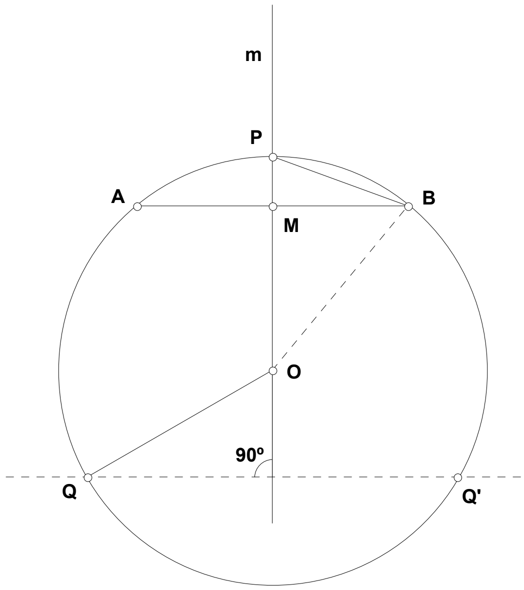
Tendo em consideração que a amplitude de um ângulo ao centro é igual à amplitude do arco compreendido entre os seus lados, temos $A\hat{O}E = \overset{\frown}{AE} = A\overset{\frown}{E}C - \overset{\frown}{EC} = 180º - 50º = 130º$.

Tendo em consideração que a soma dos ângulos internos de um triângulo é um ângulo raso e considerando o triângulo [ABD], temos:

$$A\hat{D}B = 180º - (D\hat{A}B + A\hat{B}D) = 180º - (\frac{\overset{\frown}{BE}}{2} + \frac{A\overset{\frown}{E}C}{2}) = 180º - (\frac{100º}{2} + \frac{180º}{2}) = 180 - 140º = 40º\,.$$

4. A, B, P e Q são pontos da circunferência de centro O.
Considera ainda:

- m é a mediatriz do segmento de recta [AB]
- $P \in m$
- $\overline{OQ} = 5\ cm$
- $\overline{OM} = 4 \times \overline{PM}$



a) Justifica que a mediatriz da corda [AB] passa pelo centro da circunferência.

$\overline{OA} = \overline{OB}$ *, pois [AO] e [OB] são raios da mesma circunferência. Logo, O é um ponto da mediatriz do segmento de recta [AB], visto ser equidistante dos extremos desse segmento.*

b) Determina a imagem do ponto Q, relativamente à simetria axial de eixo m.

A imagem do ponto Q, relativamente à simetria axial de eixo m, é o ponto Q'.

c) Determina o perímetro e a área do triângulo [BMP].

Como a mediatriz de uma corda passa pelo centro da circunferência, é perpendicular e bissecta essa corda, então os triângulos [PMB] e BOM] são rectângulos.

Como $\overline{OM} = 4 \times \overline{PM}$ *e* $\overline{OP} = \overline{OQ} = 5\ cm$ *, então* $\overline{OM} = 4\ cm$ *e* $\overline{PM} = 1\, cm$.

Aplicando o teorema de Pitágoras nos triângulos acima referidos, vem:

$$\overline{MB} = \sqrt{\overline{OB}^2 - \overline{OM}^2} = \sqrt{5^2 - 4^3} = \sqrt{9} = 3\ cm.$$

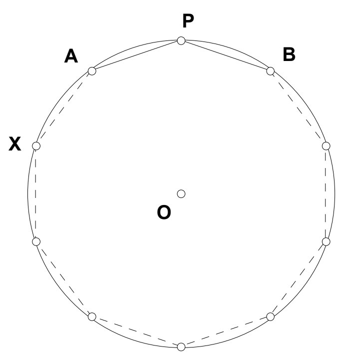
$$\overline{PB} = \sqrt{\overline{MB}^2 + \overline{PM}^2} = \sqrt{3^2 + 1^3} = \sqrt{10}\ cm.$$

Logo,

$$P_{[BMP]} = \overline{BM} + \overline{MP} + \overline{PB} = 3 + 1 + \sqrt{10} = 4 + \sqrt{10}\ \textit{centímetros.}$$

$$A_{[BMP]} = \frac{\overline{MB} \times \overline{MP}}{2} = \frac{3 \times 1}{2} = 1{,}5\ \textit{centímetros quadrados.}$$

d) Admite que o segmento de recta [PB] é o lado de um decágono regular.
Qual é a amplitude do seu ângulo interno?
Explica o teu raciocínio.



Os dez vértices do decágono regular dividem a circunferência em dez arcos geometricamente iguais, cada um de amplitude $360º \div 10 = 36º$.

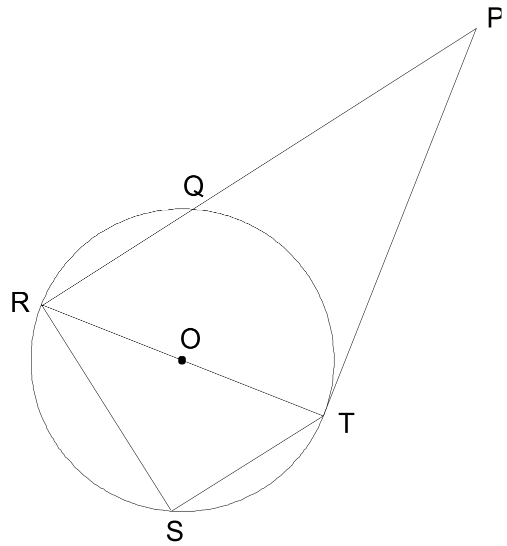
Como o ângulo APB (um dos seus dez ângulos internos geometricamente iguais) é um ângulo inscrito na circunferência, vem:

$$A\hat{P}B = \frac{A\overset{\frown}{X}B}{2} = \frac{360º - A\overset{\frown}{P}B}{2} = \frac{360º - 2 \times 36º}{2} = 144º\,.$$

Portanto, é de 144º a amplitude do ângulo interno do decágono regular.

5. Na circunferência de centro O da figura ao lado tem-se que:

- TP é tangente à circunferência em T;
- As cordas [RQ] e [ST] são paralelas;
- [RT] é um diâmetro;
- $\overset{\frown}{RQ} = \frac{2}{3} \cdot \overset{\frown}{QT}$



a) Escrevendo e resolvendo um sistema de duas equações a duas incógnitas de acordo com as condições da figura, mostra que $\overset{\frown}{RQ} = 72^{\circ}$ e $\overset{\frown}{QT} = 108^{\circ}$.

Designando as amplitudes (em graus) dos arcos RQ e QT, respectivamente, por x e y, temos:

$$\begin{cases} x + y = 180 \\ x = \frac{2}{3}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}y + y = 180 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 3y = 540 \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{540}{5} \\ - \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 108 \\ x = \frac{2}{3} \times 108 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 108 \\ x = 72 \end{cases}$$

Portanto, $\overset{\frown}{RQ} = 72^{\circ}$ *e* $\overset{\frown}{QT} = 108^{\circ}$.

b) Classifica o triângulo [PRT] quanto aos ângulos. Justifica.

Como uma recta tangente a uma circunferência é perpendicular ao raio no ponto de tangência, então o ângulo RTP é recto. Consequentemente, o triângulo [PRT] é rectângulo.

c) Justifica a seguinte afirmação:
"*Os triângulos [RST] e [PRT] são semelhantes*."

RECORDA: Para que dois triângulos sejam semelhantes basta que dois dos ângulos correspondentes sejam iguais.

Numa circunferência, arcos e cordas compreendidos entre cordas paralelas são geometricamente iguais. Assim, os arcos QT e RS são geometricamente iguais. Logo, os ângulos inscritos RTS e PRT são geometricamente iguais, pois compreendem entre os seus lados arcos geometricamente iguais.

Por outro lado, o ângulo RST é um ângulo recto, pois está inscrito numa semi-circunferência.

Portanto, os triângulos [RST] e [PRT] são semelhantes, pois $\angle PTR \cong \angle RST$ *e* $\angle PRT \cong \angle RTS$.

FIM

O Professor

---

(1)

Como o comprimento do arco AC é duplo do comprimento do arco BC e o arco ACB é uma semi-circunferência, então $\overset{\frown}{BC} = 60^{\circ}$ e $\overset{\frown}{AC} = 120^{\circ}$.

Assim, $C\hat{A}B = \frac{\overset{\frown}{BC}}{2} = \frac{60^{\circ}}{2} = 30^{\circ}$, $A\hat{B}C = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2} = \frac{120^{\circ}}{2} = 60^{\circ}$, $A\hat{C}B = \frac{180^{\circ}}{2} = 90^{\circ}$ e $C\hat{O}B = \overset{\frown}{CB} = 60^{\circ}$.