

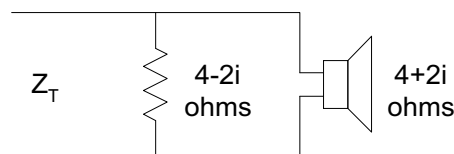
Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 7 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a que estão será anulada, o mesmo a contendo e em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Se desejar instalar altifalantes num auto-rádio, será necessário adaptar os altifalantes à impedância do amplificador. Para adaptar o altifalante que deseja ligar ao auto-rádio, tem de colocar uma carga em paralelo com o altifalante.



Suponha que o altifalante tem uma impedância de $4 + 2i$ ohms e a carga colocada em paralelo com o altifalante tem uma impedância de $4 - 2i$ ohms.

A fórmula $Z_T = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$ permite obter a impedância total do circuito paralelo. A impedância total do circuito paralelo é:

- [E] $Z_T = 1,5$ ohms [F] $Z_T = 2,5 - 2i$ ohms [G] $Z_T = 1,5 + 2i$ ohms [H] $Z_T = 2,5$ ohms

2. Se $\ln a = x$ e $\ln b = y$, então $\frac{a}{b}$ é:

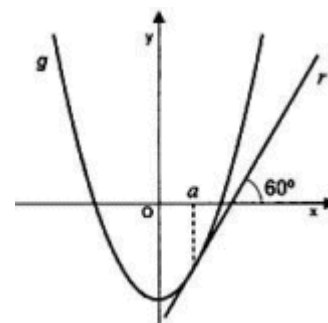
- [E] $e^{x,y}$ [F] e^{x-y} [G] x,y [H] e^{x+y}

3. Os números de telefone mudaram. Agora têm 9 algarismos, sendo os três primeiros (da esquerda) iguais para todos os habitantes de uma certa região. Se os três primeiros algarismos forem 2, 5, 4, quantos números de telefone sem algarismos repetidos podem ser criados nesta região?

- [E] 151200 [F] 720 [G] 5 040 [H] 210

4. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$
- uma recta r tangente ao gráfico de g , no ponto de abcissa a .



A inclinação da recta r é 60° . Indique o valor de a .

- [E] $\frac{1}{2}$ [F] $\frac{1}{3}$
 [G] $\frac{\sqrt{3}}{2}$ [H] $\frac{\sqrt{3}}{4}$

5. Seja $w = a + bi$ um número complexo cujo afixo pertence ao primeiro quadrante.

A área do quadrilátero cujos vértices são os afixos de w , \bar{w} , $-w$ e $-\bar{w}$ é

[E] $(a + b)^2$

[F] $4b\sqrt{ab}$

[G] $a^2 + b^2$

[H] $4ab$

6. De dois acontecimentos A e B, sabe-se que $P(A) = 0,2$, $P(B) = 0,4$ e $P(A \cap B) = 0,2$.

Qual das seguintes afirmações é falsa?

[E] $P(A \cup B) = 0,4$

[F] Os acontecimentos A e B são independentes

[G] Os acontecimentos A e B são compatíveis

[H] $P(B | A) = 1$

7. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g , de domínio \mathbb{R} , da qual a recta t é uma assíntota.

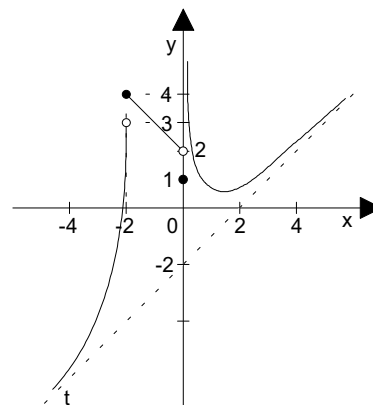
O valor de $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{g(x) - 4}{x + 2}$ é:

[E] $+\infty$

[F] -2

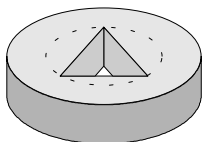
[G] -1

[H] 0



2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.



1. Numa peça cilíndrica de metal pretende-se escavar um prisma triangular recto, cuja base $[ABC]$ satisfaz as seguintes condições:

- a circunferência de centro O tem raio 2 cm;
- A corda $[AC]$ é perpendicular ao diâmetro $[BD]$;
- $\widehat{OAC} = \alpha$, com $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

a) Prove que a área da base do prisma, em função de α e em centímetros quadrados, é dada por:

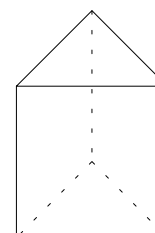
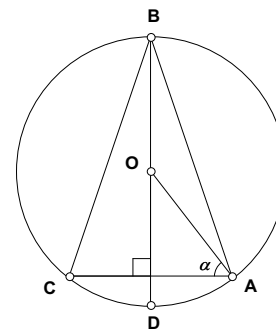
$$A(\alpha) = 4 \cos(\alpha) + 2 \sin(2\alpha)$$

b) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine a área máxima possível de obter para a base do prisma e o correspondente valor de α .

c) Numa breve composição aborde as seguintes questões:

- $\lim_{\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} P(\alpha) = 8$, designado $P(\alpha)$ o perímetro (em centímetros) da base do prisma em função de α .
- A opção escolhida consistiu em considerar $\alpha = 0$.
Como classifica a base do prisma, quanto aos lados e quanto aos ângulos?

d) Considere o prisma triangular recto acima referido. Escolhidos ao acaso 4 dos seus vértices, qual é a probabilidade de se obter um quadrilátero?



2. Considere a função real de variável real definida por: $g(x) = x + \frac{\text{sen}x}{e^x}$

a) Utilizando o teorema de Bolzano, prove que a função possui pelo menos um zero no intervalo $] -4, -\pi[$.

b) Mostre que $g''(x) = -2e^{-x} \cos x$.

Justifique que o gráfico da função possui uma infinidade de pontos de inflexão.

3. Considere a função real de variável real definida por: $f(x) = \begin{cases} x + \text{sen}\left(\frac{x}{2}\right) & \Leftarrow x > 0 \\ \frac{x}{2-x} & \Leftarrow x \leq 0 \end{cases}$

a) Recorrendo à definição de derivada de uma função, averigüe se existe $f'(0)$.

b) Determine as assíntotas do gráfico de f .

4. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.

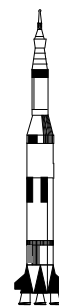
Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:

$$v(t) = -3 \cdot \log_2(1 - 0,005t) - 0,01t$$

A variável t designa o tempo, em segundos após o arranque.

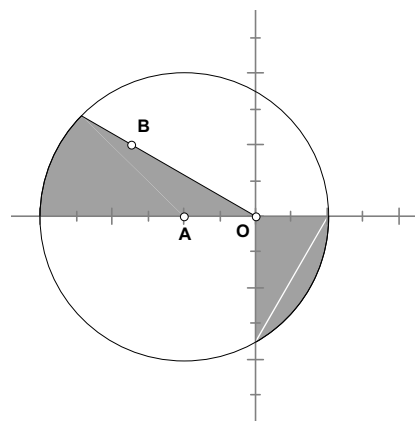
a) A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem à massa do combustível. Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t \in [0, 160]$.

b) Prove que a taxa de variação média de v no intervalo $[100, 150]$ é 0,05. Interprete este valor no contexto da situação descrita.



5. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária. Observe a figura:

- A circunferência tem centro A, afixo de -1 e raio 2
- O ponto B é o afixo do número complexo z_1 cujo argumento é $\frac{5\pi}{6}$.



a) Determine z_1 na forma algébrica, sabendo que é solução da equação

$$(\sqrt{3} - i) \cdot z^3 + 16 \text{cis} \frac{4\pi}{3} = 0.$$

b) Defina por uma condição em \mathbb{C} a região sombreada, incluindo a fronteira.

6. Seja \mathbb{C} o conjunto dos números complexos; i designa a unidade imaginária.

Prove que: $z^n - (\bar{z})^n = 2\rho^n i \text{sen}(n\theta)$, $n \in \mathbb{N}$.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte 63 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E R R A D A S							
		0	1	2	3	4	5	6	7
C E R T A S	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	0	0	
	2	18	15	12	9	6	3		
	3	27	24	21	18	15			
	4	36	33	30	27				
	5	45	42	39					
	6	54	51						
7	63								

2.ª Parte 137 pontos

1. 42 pontos

- a) 8
- b) 16
- c) 10
- d) 8

2. 23 pontos

- a) 10
- b) 13

3. 24 pontos

- a) 12
- b) 12

4. 18 pontos

- a) 8
- b) 10

5. 20 pontos

- a) 12
- b) 8

6. 10 pontos

Total 200 pontos