Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

03/04/2000 **Turma A - Prova 1** **12.º Ano**

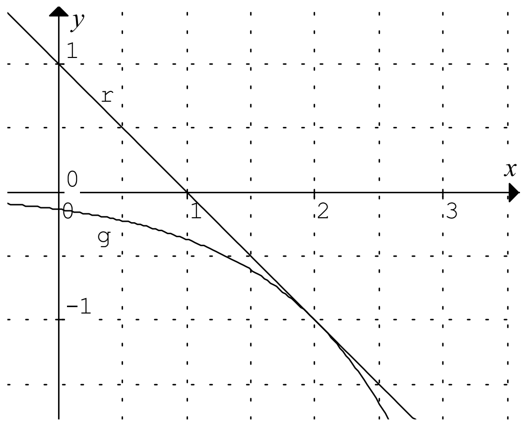
Nome: ______________________ *N.º:* ____ *Turma:* ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g derivável de domínio *IR*.

A recta r, de equação $y = -x + 1$, é tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas (2, -1).



a) Sabendo ainda que o eixo Ox é assimptota do gráfico de g em torno de $-\infty$, então g pode ser definida por:

[A] $g(x) = \ln\left(\frac{3-x}{e}\right)$ **[B]** $g(x) = -2^{x-2}$

[C] $g(x) = -e^{x-2}$ **[D]** $g(x) = \frac{1}{x-3}$

b) Seja $f(x) = \ln(k - x) - 1$, com $k \in R$, uma função real de variável real.

O valor de k para o qual é contínua no ponto $x = 2$ a função $h(x) = \begin{cases} f(x) & \Leftarrow & x < 2 \\ g(x) & \Leftarrow & x \geq 2 \end{cases}$ é

[A] e^3 **[B]** 2 **[C]** $e^2 + 2$ **[D]** 3

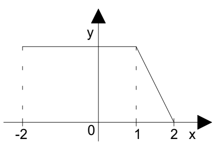
2. O valor de $\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$ é

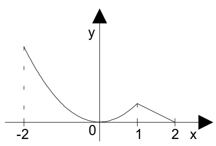
[A] 1 **[B]** $\sqrt{e}$ **[C]** e **[D]** e^2

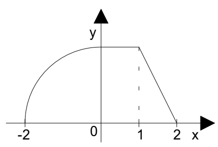
3. Seja g uma função real de variável real, tal que:

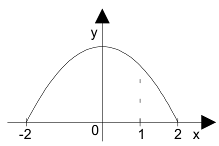
- g é contínua no intervalo $[-2,\ 2]$;
- $g'(0) = 0$;
- $g'(1)$ não existe;
- $g''(x) < 0$ para $-2 < x < 0$.

Qual dos seguintes gráficos pode ser um gráfico de g?

[A] 

[B] 

[C] 

[D] 

4. O penúltimo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10.
Qual é o terceiro número dessa linha?

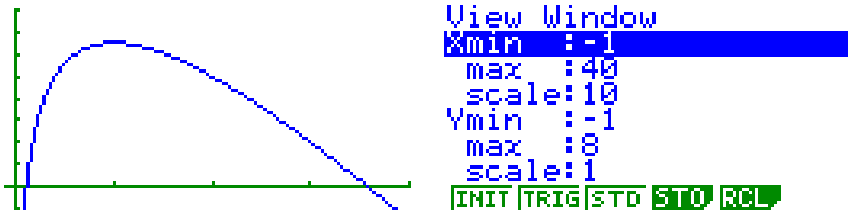
[A] 144 **[B]** 45 **[C]** 19 **[D]** 11

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. Na figura junta está representado o gráfico de uma função *f*, real de variável real,

$$f(x) = 5\ln x - \frac{1}{2}x$$



a) Mostre analiticamente que o gráfico tem uma única concavidade.

b) Justificando, determine o contradomínio da função.

c) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ e determine, caso existam, as equações das assimptotas ao gráfico de *f*.

2. O planeta Altair está situado a dezasseis anos luz da Terra. O período em que o planeta tem luz (é dia) dura 12 horas, mas o seu clima, durante o dia, é horrível.

Um período diurno típico em Altair caracteriza-se pela grande amplitude térmica: a variação da temperatura desde que amanhece até anoitecer pode ser traduzida pela expressão

$$T(t) = (12t - t^2).e^{0,1t}$$

sendo *T* a temperatura em graus Celcius e *t* o tempo em horas.

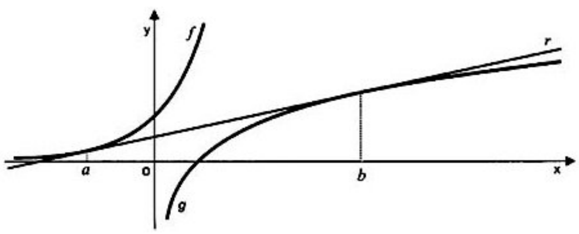
a) Determine $\lim\limits_{t\to0^+} \frac{(12t-t^2).e^{0,1t}}{t}$ e interprete este valor no contexto da situação descrita.

b) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, determine o instante para o qual é máxima a temperatura no período diurno de Altair.
Calcule o valor dessa temperatura máxima, apresentando o resultado com aproximação às décimas.

Sugestão: Comece por mostrar que $T'(t) = -\frac{e^{0,1t}.(t^2+8t-120)}{10}$

3. Na figura ao lado estão representadas graficamente duas funções:

- a função *f*, definida em *IR* por $f(x) = 2^x$
- a função *g*, definida em IR^+ por $g(x) = \log_2 x$



a) Mostre que a taxa média de variação de *g* no intervalo $[b, b+3]$ é dada por $\log_8(1+\frac{3}{b})$, com $b \in IR^+$.

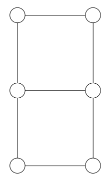
b) A recta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *a* e é tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa *b*.

Nesta circunstância, mostre que é condição necessária que $2^a = \frac{1}{b}\times\left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$, com $b \in IR^+$.

4. Sem o apoio da calculadora gráfica para a argumentação, justifique convenientemente a existência de **<u>uma única</u>** solução para a equação $e - x = \ln x$.

Sugestão: Considere a função definida por $f(x) = e - x - \ln x$.
Tenha presente o teorema de Bolzano e o conceito de monotonia de uma função num intervalo.

5. O alfabeto *Braille* é um sistema de representação de letras, símbolos musicais, números e símbolos matemáticos através de pontos em relevo, marcados em papel ou outro material, que podem ser lidos pelo tacto. Cada carácter é representado por um conjunto de pontos (1 no mínimo e 6 no máximo), organizados numa grelha com duas colunas e três linhas. (ver figura ao lado)

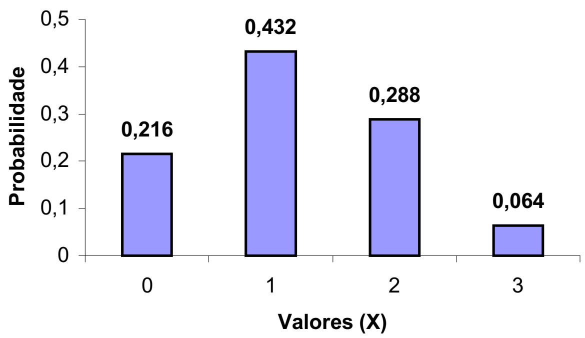


Quantos caracteres diferentes podemos obter com um número par de pontos em relevo?

6. Acabou o tempo de um jogo de basquetebol, e uma das equipas está a perder por um ponto, mas tem direito a dois lances livres.
O Manuel vai tentar encestar.
Sabendo que este jogador concretiza, em média, 70% dos lances livres que efectua e que cada lance livre concretizado corresponde a um ponto, determine a probabilidade de o jogo terminar empatado.

7. O gráfico representa a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X.

Calcule a esperança matemática (média) e o desvio padrão da variável X.



8. Resolva uma, e **apenas uma**, das questões seguintes:

A. Usando a fórmula do binómio de Newton, prove que: ${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \ldots + (-1)^n \times {}^nC_n = 0$.

B. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis (A e B são pois subconjuntos de S).

Demonstre que se $p(A) > p(B)$, então $p(A \mid B) \geq p(B \mid A)$.

C. Demonstre que é verdadeira a seguinte afirmação:

«*Se os valores de uma variável x crescerem em progressão geométrica de razão* $r > 0$ *, com o primeiro termo* $u_1 > 0$ *, os logaritmos de x, em qualquer base, crescerão em progressão aritmética*.»

Sugestão: Recorde que o termo geral de uma progressão geométrica cujo primeiro termo é u_1 e razão r se pode escrever na forma $u_n = u_1 \times r^{n-1}$ e que o termo geral da progressão aritmética se pode escrever na forma $u_n = u_1 + (n-1) \times r$.

D. Demonstre que:

«*Toda a função derivável (com derivada finita) num dado ponto é contínua nesse ponto*.»

FIM

O Professor

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 45 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E R R A D A S							
		0	1	2	3	4	5		
	0	0	0	0	0	0	0		
C	1	9	6	3	0	0			
E	2	18	15	12	9				
R	3	27	24	21					
T	4	36	33						
A	5	45							
S									

2.ª Parte .... 155 pontos

1\. .... 37 pontos
- a) 10
- b) 15
- c) 12

2\. .... 30 pontos
- a) 10
- b) 20

3\. .... 20 pontos
- a) 10
- b) 10

4\. .... 15 pontos

5\. .... 12 pontos

6\. .... 12 pontos

7\. .... 14 pontos

8\. .... 15 pontos

Total **200 pontos**