

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a que stão será anulada, o mesmo a contendo e m caso de resposta ambigua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Considere a função m definida por $m(x) = \begin{cases} x + e^{2x} + k & \Leftarrow x \leq 0 \\ \ln \frac{1+x^2}{e} & \Leftarrow x > 0 \end{cases}$.

O valor de k para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função m no intervalo $[-\frac{1}{e}, e]$ é:

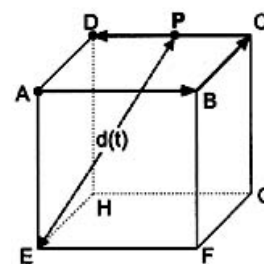
- [E] $\frac{1}{e}$ [F] -2 [G] $-e+1$ [H] 1

2. Sejam a, b e c três números reais positivos tais que $\log_a(b^2) = c$.
Qual é o valor de $\log_a(ab)$?

- [E] $a+2c$ [F] $1+2c$ [G] $ab + \frac{c}{2}$ [H] $1 + \frac{c}{2}$

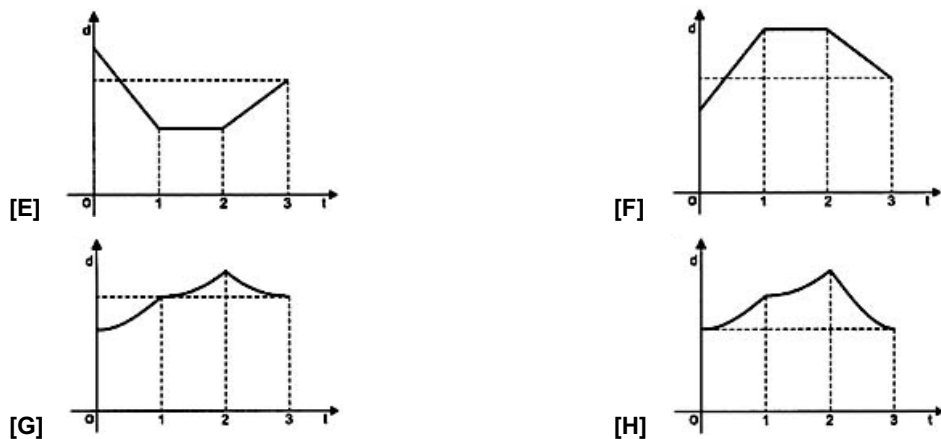
3. Na figura está representado um cubo.

Considere que um ponto P se desloca ao longo do trajecto que a figura sugere: P parte de A e percorre sucessivamente as arestas $[AB]$, $[BC]$ e $[CD]$, terminando o percurso em D .



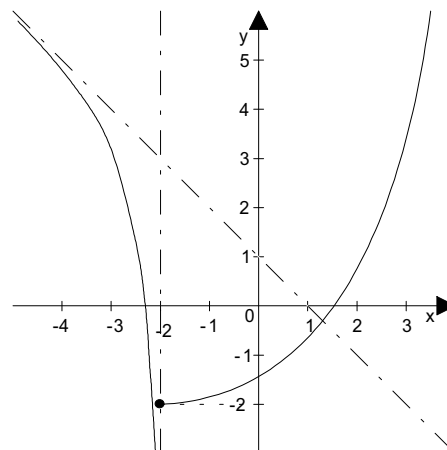
O ponto P demora um segundo a percorrer cada uma das arestas.

Seja $d(t)$ a distância do ponto P ao ponto E , t segundos após a partida.
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?



4. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio \mathbb{R} .

As rectas de equações $y = -x + 1$ e $x = -2$ são as únicas assíntotas do gráfico de g .



- a) Seja (x_n) a sucessão de termo geral $x_n = -2 - n^2$.

Indique o valor de $\lim g(x_n)$

[E] -1

[F] $+\infty$

[G] $-\infty$

[H] -2

- b) Os valores dos limites $\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{g(x)}{x+2}$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) + x]$ são, respectivamente:

[E] $-\infty$ e $+\infty$

[F] $+\infty$ e -1

[G] $-\infty$ e 1

[H] $+\infty$ e 1

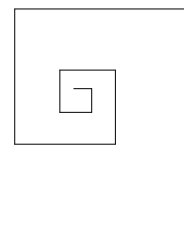
2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.

1. A espiral ao lado, construída a partir do segmento de recta maior, é formada por 11 segmentos e cada um deles mede $\frac{3}{4}$ do anterior.

O maior deles mede 6 cm.

Se continuássemos a espiral indefinidamente, qual seria o seu comprimento total?



2. As máquinas de aquecimento de água de uma piscina foram ligadas às 7 horas da manhã de um certo dia. A temperatura da água, em graus centígrados, t horas após as máquinas terem sido ligadas, é dada pela expressão:

$$C(t) = 27 - 18.e^{-t}$$

- a) Utilize o teorema de Bolzano-Cauchy para justificar que houve um instante, entre as 9 horas e as 9 horas e trinta minutos, em que a temperatura da água foi de 25°C .
- b) Determine analiticamente o instante (aproximação ao minuto) em que a temperatura da água foi de 25°C .
- c) Considere agora a função real de variável real:

$$c(x) = 27 - 18.e^{-x}$$

c1) Caracterize a função inversa de c .

c2) Averigüe, justificando, a existência de assíntotas ao gráfico de c .

3. Sabendo que $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$, então $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$.

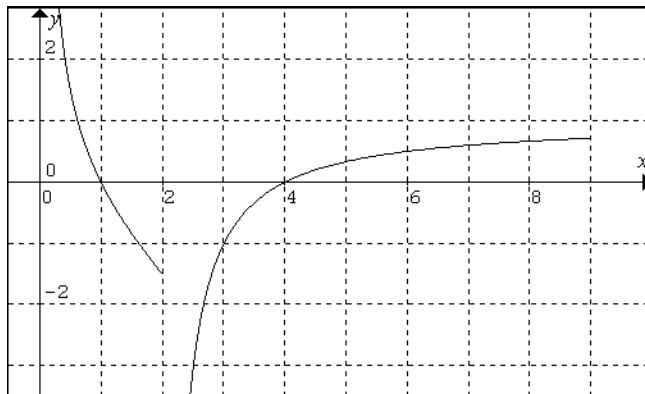
Na inequação que se segue, $a > 1$:

$$\log_a(\frac{1}{2})^2 > \log_a(\frac{1}{2})^3 \Leftrightarrow 2\log_a(\frac{1}{2}) > 3\log_a(\frac{1}{2}) \Leftrightarrow 2 > 3$$

Onde está o erro? Justifique.

4. Seja h a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} - x & \leftarrow x \leq 2 \\ 2 - \frac{x}{x-2} & \leftarrow x > 2 \end{cases}$$



- a) Na figura ao lado está representada a função f , restrição de h ao intervalo $]0, 9]$.

a1) Por observação do gráfico, indique, justificando, o sinal das derivadas laterais de h no ponto de abscissa $x = 2$.

a2) Usando a definição de derivada de uma função num ponto, determine $h'(2^-)$.

a3) Escreva uma equação vectorial da semi-recta esquerda tangente ao gráfico da função h no ponto de abscissa $x = 2$.

NOTA: Caso não tenha resolvido a alínea anterior, considere $h'(2^-) = -2$.

- b) Determine analiticamente as assíntotas do gráfico de h .

5. Num Instituto de Pesquisa Ecológica estudou-se a relação entre o oxigénio consumido por pequenos animais e o respectivo peso. Encontrou-se a fórmula aproximada

$$\log y = \log 6 + 0,9 \cdot \log x$$

onde y é o volume de oxigénio em microlitros por hora e x o peso da colónia em gramas.

a) Exprima y em função de x .

b) Sendo y_2 o oxigénio correspondente ao peso $x_2 = 100x$, calcule $\frac{y_2}{y}$ e interprete o resultado.

6. Considere um baralho de 52 cartas.

a) Tiram-se 5 cartas à sorte.
Qual é a probabilidade de essa mão ter um ás e dois reis?

b) Agora, desse baralho de 52 cartas retirámos algumas.
De entre as que ficaram, verificou-se, relativamente à extracção de uma carta, as seguintes probabilidades:

- $p(\text{ás}) = 0,12$
- $p(\text{copas}) = 0,3$
- $p(\text{a carta não ser ás nem copas}) = 0,62$

Mostre que a probabilidade de sair ás de copas é 0,04.
Quantas cartas se retiraram?

FIM

O Professor

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E R R A D A S					
		0	1	2	3	4	5
C E R T A S	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

2.ª Parte 155 pontos

1. 12 pontos

2. 46 pontos

a) 15

b) 9

c1) 10

c2) 12

3. 10 pontos

4. 46 pontos

a1) 6

a2) 12

a3) 8

c) 20

5. 18 pontos

a) 8

b) 10

6. 23 pontos

a) 11

b) 12

Total 200 pontos