

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1.ª Parte

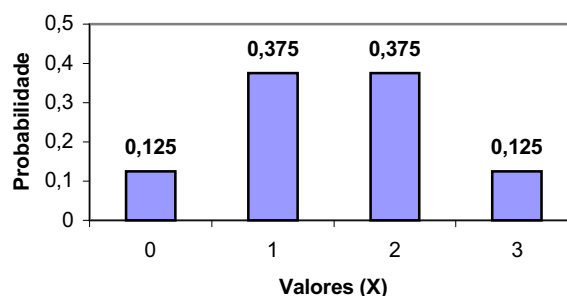
Para cada uma das seguintes 7 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a que estão será anulada, o mesmo a contendo e m caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. O gráfico representa a distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X.

A esperança matemática (média) da variável X é

- [A] 0,25
- [B] 1
- [C] 1,5
- [D] 2



2. De uma função g , de domínio \mathbb{R} , sabe-se que:

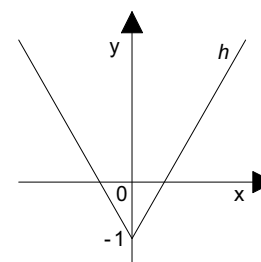
- $g(0) = 1$
- g é estritamente crescente em $[0, +\infty[$
- g é par

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

- [A] O contradomínio de g é $[0, +\infty[$
- [B] g é estritamente crescente em \mathbb{R}
- [C] g é injectiva
- [D] g não tem zeros

3. A figura representa parte de duas semi-rectas que são o gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R} , que tem Oy como eixo de simetria. O contradomínio da função $x \rightarrow 2^{h(x)}$ é:

- [A] $[-1, +\infty[$
- [B] $[-2, +\infty[$
- [C] $]0, +\infty[$
- [D] $[\frac{1}{2}, +\infty[$

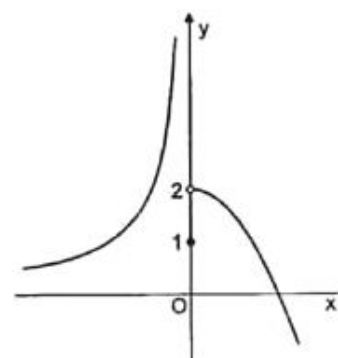


4. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g de domínio \mathbb{R} e contínua em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$.

Indique o valor de $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n)$.

- [A] 0
- [B] 1
- [C] 2
- [D] $+\infty$



5. Uma caixa contém dez disquetes, das quais três são defeituosas. Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas disquetes da caixa.

Considere os seguintes acontecimentos:

- D_1 - a disquete retirada em primeiro lugar é defeituosa;
- D_2 - a disquete retirada em segundo lugar é defeituosa.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $p(D_2 | \overline{D_1})$?

[A] $\frac{3}{10} \times \frac{7}{10}$

[B] $\frac{1}{3}$

[C] $\frac{3}{10} \times \frac{7}{9}$

[D] $\frac{1}{4}$

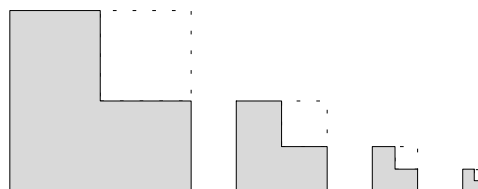
2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.

1. De um quadrado inicial retira-se um quadrado com metade do lado, do segundo quadrado retira-se outro e assim por diante.

Suponha que a área do quadrado inicial é 1.

Considere (a_n) a sucessão das áreas das figuras que sobram em cada partição.



- a) Identifique a razão da progressão e mostre que $a_n = 3 \times (\frac{1}{4})^n$ é o termo geral dessa sucessão.
- b) Supondo que continuávamos indefinidamente a partição, determine a soma das áreas de todas as figuras que sobram em cada partição. Interprete (de forma geométrica, visual,...) o resultado obtido.

2. Numa grande cidade surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi dada pela fórmula

$$P = 2^{-0,25t^2 + t + 5},$$

onde P representa a percentagem de pessoas infectadas e t o tempo em dias após a declaração da epidemia pelo Serviço Nacional de Saúde (SNS).

- a) Determine, analiticamente, o período de tempo (em horas) em que a percentagem de pessoas infectadas foi superior ou igual à existente no momento da declaração da epidemia.
- b) Quando da declaração da epidemia, o SNS sossegou a população da cidade informando que a situação não era de preocupar, pois tinham sido tomadas todas as medidas recomendadas e que a epidemia seria erradicada em menos de uma semana.

Numa pequena composição, comente o teor das declarações do SNS, tendo em conta que:

- a epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de pessoas infectadas for inferior a 1%;
- por questões de saúde pública e de acordo com a Organização Mundial de Saúde, este tipo de epidemia configura uma situação muito grave quando afecta uma população em mais de 60% por um período superior a 24 horas.

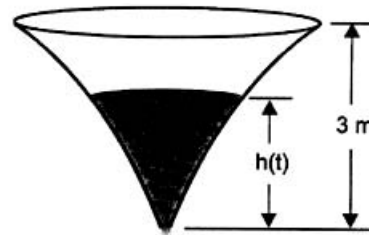
Nota: Na resolução desta questão, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.

Não é obrigatório a determinação analítica de valores que considere indispensáveis, desde que os apresente com uma aproximação razoável e indique o processo que utilizou recorrendo à calculadora.

3. A figura representa um reservatório com três metros de altura. Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado. O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$$h(t) = \log_2(a - bt), \quad t \in [0, 14], \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são constantes reais positivas.}$$



- a) Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$.
- b) Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-0,2$. Interprete este valor no contexto da situação descrita.

Nota: A utilização da calculadora não será permitida para a resolução desta questão.

- c) Caracterize t , função inversa de h .

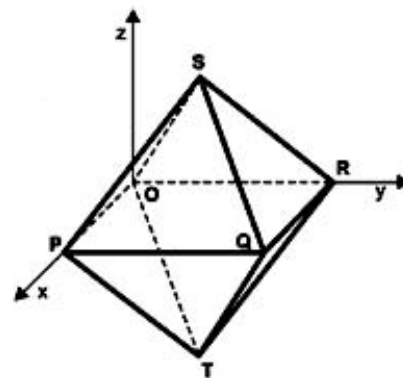
4. Utilizando uma calculadora gráfica a Ana descobriu que a equação $\log x^2 = 2\log 3$ tinha duas soluções, que eram 3 e -3 . De seguida, resolveu algebricamente a equação seguindo os seguintes passos:

$$\log x^2 = 2\log 3 \Leftrightarrow 2\log x = 2\log 3 \Leftrightarrow \log x = \log 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Onde está o erro? Justifique.

5. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um octaedro regular. Sabe-se que:

- um dos vértices do octaedro é a origem do referencial
- a recta ST é paralela ao eixo Oz
- o ponto P pertence ao semieixo positivo Ox
- o ponto R pertence ao semieixo positivo Oy
- a aresta do octaedro tem comprimento 1



Seja $A(x, 0, 0)$ um ponto pertencente ao semieixo positivo Ox e B um ponto pertencente ao semieixo positivo Oy , tais que $\overline{OB} = \frac{1}{OA+1}$.

- a) Mostre que o volume da pirâmide $[AOBS]$ é dado pela expressão $V(x) = \frac{x\sqrt{2}}{12(1+x)}$. ($V_{\text{Pirâmide}} = \frac{1}{3} \times A_b \times h$)
- b) Imagine que o ponto A se desloca sobre o semieixo positivo Ox , afastando-se infinitamente da origem do referencial. Para que valor tende, então, o volume da pirâmide?

6. A Zulmira tem na estante do seu quarto três CD's dos **U2**, quatro dos **Yes** e cinco dos **Beatles**.

Quando soube que ia passar o fim de semana a casa da sua prima Elvira, decidiu escolher seis desses CD's, para ouvirem durante esse fim de semana. A Zulmira pretende levar dois CD's dos **U2**, um dos **Yes** e três dos **Beatles**.

- a) De quantas maneiras pode fazer a sua escolha?
- b) Admita agora que a Zulmira **já seleccionou** os seis CD's que irão ouvir em casa da Elvira. Supondo aleatória a sequência pela qual vão ser ouvidos (sem repetir a audição de qualquer CD), qual é a probabilidade de os dois CD's dos **U2** serem ouvidos um a seguir ao outro?

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E R R A D A S					
		0	1	2	3	4	5
C E R T A S	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

2.ª Parte 155 pontos

1. 25 pontos

a) 12

b) 13

2. 30 pontos

a) 15

b) 15

3. 37 pontos

a) 12

b) 15

c) 10

4. 12 pontos

5. 25 pontos

a) 15

b) 10

6. 26 pontos

a) 11

b) 15

Total 200 pontos