

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 7 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

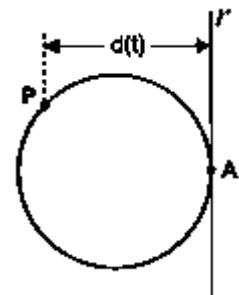
Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a que stão será anulada, o mesmo a contendo e m caso de resposta ambigua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Na figura estão representadas:

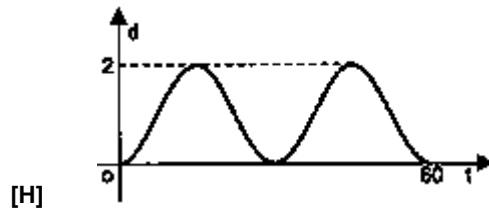
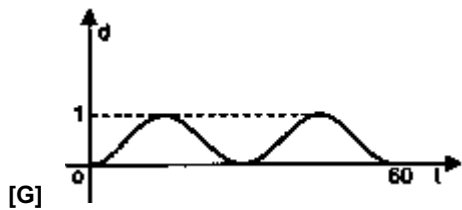
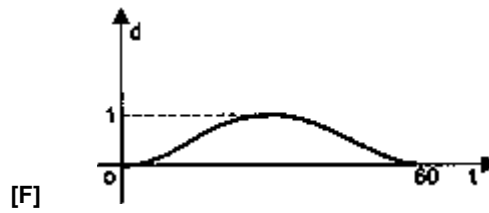
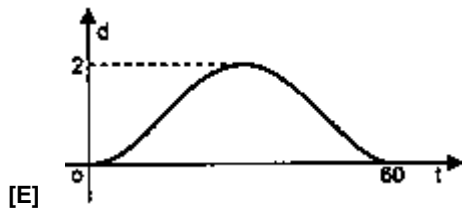
- uma circunferência de raio 1
- uma recta r , tangente à circunferência no ponto A

Admita que um ponto P, partindo de A, se desloca sobre a circunferência, em sentido contrário ao dos ponteiros de um relógio, descrevendo uma única volta em sessenta segundos.

Seja $d(t)$ a distância do ponto P à recta r , t segundos após o início do movimento.



Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função d ?



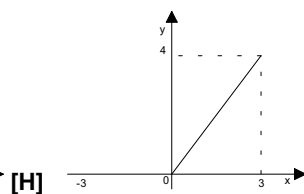
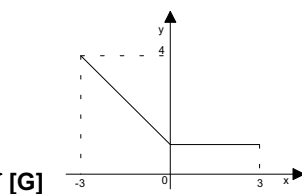
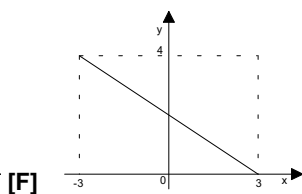
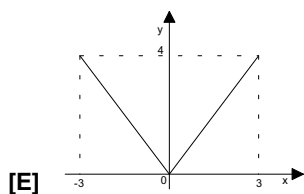
2. Os quatro primeiros números de uma certa linha do triângulo de Pascal são: 1, 11, 55 e 165.

Então, os três últimos números da linha seguinte são

- [E] 220, 66 e 1 [F] 24, 12 e 1 [G] 236, 24 e 12 [H] 66, 12 e 1

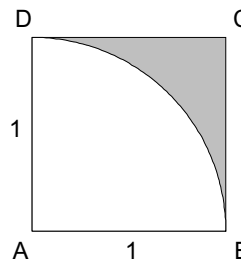
3. De uma certa função f sabe-se que o seu domínio é o intervalo $[-3, 3]$ e o seu contradomínio é o intervalo $[-4, 4]$.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função $|f|$ (módulo de f)?



4. Na figura estão representados um quadrado [ABCD] e um arco de circunferência BD de centro em A. O comprimento do lado do quadrado é uma unidade.

Escolhido aleatoriamente um ponto do quadrado, qual é a probabilidade de ele pertencer à zona sombreada?



[E] $\frac{\pi - 1}{4}$

[F] $\frac{4 - \pi}{2}$

[G] $\frac{4 - \pi}{4}$

[H] $\frac{1 - \pi}{2}$

5. De um saco contendo 20 rifas numeradas de 1 até 20 retiram-se duas de uma só vez.

Qual é a probabilidade de obter números consecutivos?

[E] 8%

[F] 10,5%

[G] 10%

[H] 20%

6. As alturas, em centímetros, dos rapazes e das raparigas presentes num jantar de finalistas geram distribuições normais de média igual a 170 e desvio padrão, respectivamente, 5 e 10.

a) As distribuições referidas estão associadas a cada uma das curvas da figura:



b) A percentagem dos rapazes que se espera que tenham altura superior a 165 cm é aproximadamente:

[E] 95%

[F] 84%

[G] 68%

[H] 16%

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. O número de células de certo tipo é dado em função do tempo t (em segundos), pela igualdade

$$N(t) = N_0 \times 2^{\frac{t}{k}}, \text{ com } k \text{ e } N_0 \text{ números reais positivos.}$$

a) Calcule $N(t)$ para $t=0$ e $t=k$ e deduza qual o significado das constantes N_0 e k .

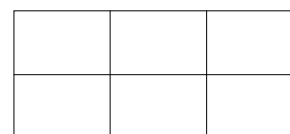
b) Suponha agora que $N_0 = 100$ e $k = 100$.

Calcule o instante em que o número de células se torna 16 vezes maior do que no instante inicial.

2. Um painel é formado por seis rectângulos, como a figura indica.

De quantas maneiras diferentes se pode pintar o painel, sabendo que dois quaisquer dos rectângulos têm de ser brancos e os outros quatro de cores diferentes, escolhidas entre amarelo, preto, verde, rosa e encarnado.

Exponha o seu raciocínio.



3. Um professor tem duas turmas, a **A** com 10 rapazes e 15 raparigas e a **B** com 10 rapazes e 20 raparigas. Quando andava a passear pela Avenida com um colega, este disse-lhe:
«- Olha, vai ali uma das tuas alunas».
Qual é a probabilidade de ela ser da turma **B**?

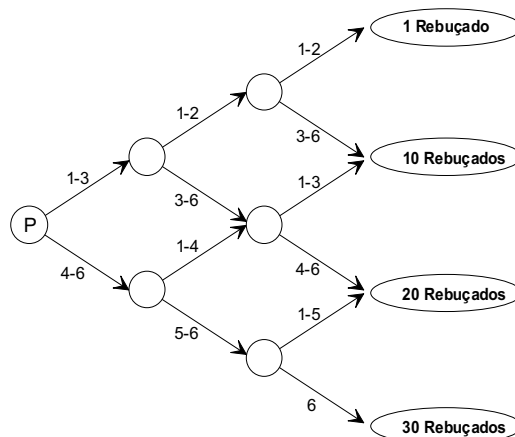
Sugestão: Construa um diagrama em árvore.

4. A 1.ª Parte desta Prova Escrita é constituída por 7 questões de escolha múltipla, cada uma delas apenas com uma resposta correcta entre 4 alternativas.

Admita que um dos seus colegas selecciona aleatoriamente uma das alternativas para cada uma das 7 questões. O que é mais provável, acertar uma ou duas questões?

5. Numa festa para crianças, há um certo jogo em que o jogador parte da casa **P**, lança três vezes um dado perfeito, com as faces numeradas de 1 a 6, e avança de acordo com as regras indicadas no tabuleiro até chegar a uma das quatro casas que dão prémio.

Os valores indicados na figura regulam o avanço nas casas do tabuleiro de acordo com os números obtidos na face do dado voltada para cima.



Considere X a variável aleatória assim definida:

- X = "Número de rebuçados ganhos quando se joga"

- a) Mostre que a tabela seguinte representa a distribuição de probabilidades da variável aleatória X .

x_i (valores de X)	1	10	20	30
$p(X = x_i)$	$\frac{2}{36}$	$\frac{16}{36}$	$\frac{17}{36}$	$\frac{1}{36}$

- b) Sem recorrer modo estatístico da calculadora, determine a esperança matemática e o desvio padrão da variável aleatória X .

6. Recorrendo à fórmula do binómio de Newton, mostre que $\sum_{k=0}^{10} (2^k \times {}^{10}C_k) = 59049$.

7. Seja S o conjunto de resultados associados a uma experiência aleatória. Sejam A , B e C três acontecimentos. Prove que, se A e B são acontecimentos incompatíveis, então $p((A \cup B) / C) = p(A / C) + p(B / C)$.

8. Resolva apenas uma das questões seguintes:

A) Demonstre, por indução, que $A(n) = 9^n - 2^n$ é múltiplo de 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.

B) Prove, usando o método de indução matemática, que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}$.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte 63 pontos

Cada resposta certa +10 pontos

Cada resposta errada -10/3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E R R A D A S							
		0	1	2	3	4	5	6	7
C E R T A S	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	0	0	
	2	18	15	12	9	6	3		
	3	27	24	21	18	15			
	4	36	33	30	27				
	5	45	42	39					
	6	54	51						
	7	63							

2.ª Parte 137 pontos

1. 30 pontos

a) 15

b) 15

2. 10 pontos

3. 15 pontos

4. 13 pontos

5. 30 pontos

a) 15

b) 15

6. 10 pontos

7. 14 pontos

8. 15 pontos

Total 200 pontos