

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

03/04/2000

Turma A - Provas 1 e 2

12.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1-a)	1-b)	2	3	4
Prova 1	C	D	B	C	B
Questão	3-a)	3-b)	2	1	4
Prova 2	H	E	G	H	G

2.ª Parte

1.

a) O domínio da função é $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\} = \mathbb{R}^+$.

Ora, $f'(x) = 5 \times \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{5}{x} - \frac{1}{2}$ e $f''(x) = -\frac{5}{x^2}$, para todo o $x \in \mathbb{R}^+$.

Como $f''(x) < 0, \forall x \in D_f$, isto é, como f'' é sempre negativa, então o gráfico da função tem sempre a concavidade voltada para baixo.

b) A função é contínua, pois é derivável em todo o seu domínio.

Os limites nos "extremos" do domínio são:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(5 \ln x - \frac{x}{2} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 \ln x - \frac{x}{2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \times \left(5 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} \right) \right] = -\infty, \text{ pois } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

Como $f'(x) = \frac{5}{x} - \frac{1}{2} = \frac{10-x}{2x} > 0, \forall x \in]0, 10[$, a função é estritamente crescente em $]0, 10[$.

Como $f'(x) = \frac{5}{x} - \frac{1}{2} = \frac{10-x}{2x} < 0, \forall x \in]10, +\infty[$, a função é estritamente decrescente em $]10, +\infty[$.

Portanto, $f(10) = 5 \ln 10 - 5$ é máximo absoluto da função.

Assim, podemos concluir que $D'_f =]-\infty, 5 \ln 10 - 5]$.

c)
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(5 \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{2} \right) = 5 \times 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Como a função é contínua no seu domínio, apenas poderá existir uma assíntota vertical em $x = 0$.

E essa assíntota existe, pois, de acordo com a alínea b), $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(5 \ln x - \frac{x}{2} \right) = -\infty$.

Apenas poderá haver uma assíntota não vertical em torno de $+\infty$. Apesar de $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\frac{1}{2}$ (alínea c)) não

há assíntota oblíqua dado que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) + \frac{1}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 \ln x) = +\infty$.

Portanto, o gráfico de f admite apenas uma assíntota vertical de equação $x = 0$.

2.

$$a) \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(12t - t^2) \cdot e^{0,1t}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} [(12 - t) \cdot e^{0,1t}] = (12 - 0) \times 1 = 12.$$

Como $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{(12t - t^2) \cdot e^{0,1t}}{t} = T'(0^+)$, podemos dizer que no instante em que nasce o dia em Altair a temperatura cresce à taxa de 12° C por hora.

b) Ora,

$$T'(t) = [(12t - t^2) \cdot e^{0,1t}]' = (12 - 2t) \cdot e^{0,1t} + (12t - t^2) \times 0,1 \times e^{0,1t} = \frac{e^{0,1t}}{10} \cdot (120 - 20t + 12t - t^2) = -\frac{e^{0,1t} \cdot (t^2 + 8t - 120)}{10}$$

Calculemos os zeros do polinómio $t^2 + 8t - 120$:

$$t^2 + 8t - 120 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{-8 \mp \sqrt{544}}{2} \Leftrightarrow t = \frac{-8 \mp \sqrt{17 \times 2^5}}{2} \Leftrightarrow t = -4 - 2\sqrt{34} \vee t = -4 + 2\sqrt{34}$$

Tendo em consideração o sinal da função quadrática, podemos construir uma tabela de variação da função no contexto do problema ($t_1 = -4 + 2\sqrt{34}$):

t	0		t_1		12
$-e^{0,1t}$	-	-	-	-	-
$t^2 + 8t - 120$	-	-	0	+	+
$T'(t)$	+	+	0	-	-
$T(t)$	↗		≈ 71,5	↘	

Concluimos, portanto, que a máxima temperatura ocorre $-4 + 2\sqrt{34}$ horas após o início do período diurno. Essa temperatura máxima é aproximadamente 71,5° C.

3.

$$a) \text{tmv}(g)_{[b, b+3]} = \frac{g(b+3) - g(b)}{3} = \frac{\log_2(b+3) - \log_2(b)}{3} = \frac{1}{3} \times \log_2\left(\frac{b+3}{b}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{\log_8\left(\frac{b+3}{b}\right)}{\log_8 2} = \frac{1}{3} \times \frac{\log_8\left(\frac{b+3}{b}\right)}{\frac{1}{3}} = \log_8\left(1 + \frac{3}{b}\right)$$

b) Tendo em consideração que a derivada de uma função num ponto é o declive da recta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto, será então condição necessária $f'(a) = g'(b)$.

$$\text{Como } f'(x) = \ln 2 \times 2^x \text{ e } g'(x) = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{x}, \text{ então } f'(a) = g'(b) \Leftrightarrow \ln 2 \times 2^a = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{b}, \text{ donde } 2^a = \frac{1}{b} \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2.$$

4. Consideremos a função real de variável real definida por $f(x) = e - x - \ln x$, de domínio \mathbb{R}^+ .

Como a função é a soma de funções contínuas, será contínua no seu domínio e, em particular, em qualquer intervalo fechado contido no seu domínio.

Ora, $f'(x) = -1 - \frac{1}{x} < 0$, para todo o $x \in D_f$. Logo f é uma função estritamente decrescente (no seu domínio).

Portanto, caso a função admita um zero ele será único (1) (tendo em consideração a monotonia de f).

Consideremos o intervalo $[1, e]$ (onde a função é contínua).

Ora,

$$f(1) = e - 1 - 0 > 0$$

$$f(e) = e - e - 1 < 0$$

Logo, $f(e) < 0 < f(1)$.

Portanto, de acordo com o teorema de Bolzano, existe pelo menos um valor $x_1 \in]1, e[$ tal que $f(x_1) = 0$. Isto é, existe pelo menos um zero de f no intervalo considerado.

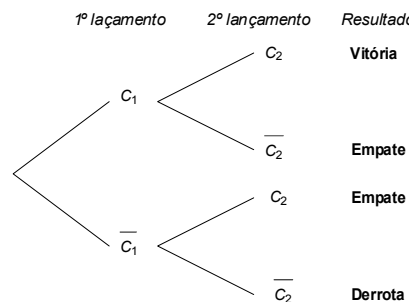
Conjugando esta última conclusão com (1), concluimos, portanto, que a função f admite apenas um zero. Consequentemente a equação dada tem apenas uma solução.

5. Podemos considerar 3 grupos de caracteres: com 2 pontos, com 4 pontos e com 6 pontos. Em cada um destes grupos, os caracteres são distintos quando os pontos considerados ocupam posição diferente na grelha considerada. Trata-se, portanto, de considerar os diferentes conjuntos com um número par de pontos da grelha, escolhidos entre os 6 possíveis.

Assim, podemos obter ${}^6C_2 + {}^6C_4 + {}^6C_6 = \frac{6!}{2! \times 4!} + \frac{6!}{4! \times 2!} + 1 = 15 + 15 + 1 = 31$ caracteres diferentes com um número par de pontos em relevo.

6. Consideremos o diagrama ao lado que ilustra os resultados possíveis do jogo, onde:

- C_1 : O jogador concretiza o 1.º lance livre
- C_2 : O jogador concretiza o 2.º lance livre



Assim, $p(E) = p(C_1 \cap \overline{C_2}) + p(\overline{C_1} \cap C_2)$.

Como os acontecimentos são independentes, temos:

$$p(E) = p(C_1) \times p(\overline{C_2}) + p(\overline{C_1}) \times p(C_2) = 0,7 \times 0,3 + 0,3 \times 0,7 = 0,42.$$

Portanto, a probabilidade de o jogo terminar empatado é de 42%.

7. $\overline{X} = 0,216 \times 0 + 0,432 \times 1 + 0,288 \times 2 + 0,064 \times 3 = 1,2$

$$\sigma = \sqrt{0,216 \times (0 - 1,2)^2 + 0,432 \times (1 - 1,2)^2 + 0,288 \times (2 - 1,2)^2 + 0,064 \times (3 - 1,2)^2} \approx 0,85$$

A esperança matemática e o desvio padrão da variável aleatória X são, respectivamente, 1,2 e 0,85 (2 c.d.).

- A. Considerando a fórmula do binómio de Newton ($(a + b)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k \times a^{n-k} \times b^k$), temos:

$$(1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k \times (1)^{n-k} \times (-1)^k = {}^nC_0 \times 1^n \times (-1)^0 + {}^nC_1 \times 1^{n-1} \times (-1)^1 + {}^nC_2 \times 1^{n-2} \times (-1)^2 + \dots + {}^nC_n \times 1^0 \times (-1)^n.$$

Como $(1 - 1)^n = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, temos ${}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - \dots + (-1)^n \times {}^nC_n = 0$, c.q.m.

- B. Aplicando a definição de probabilidade condicionada, temos:

$$p(A|B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \text{ e } p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}, \text{ com } p(A) > 0 \text{ e } p(B) > 0, \text{ pois } A \text{ e } B \text{ são acontecimentos possíveis.}$$

Se $p(A) > p(B)$, então a primeira das fracções designará um valor superior ao designado pela segunda, pois elas possuem iguais numeradores.

Isto é, $p(A|B) > p(B|A)$. Consequentemente, $p(A|B) \geq p(B|A)$, c.q.m.

- C. Tendo em conta a sugestão dada, como $x = u_1 \times r^{n-1}$ então:

$$\log_a x = \log_a (u_1 \times r^{n-1}) \text{ e, portanto,}$$

$$\log_a x = \log_a (u_1) + \log_a (r^{n-1}), \text{ donde}$$

$$\log_a x = \log_a (u_1) + (n - 1) \log_a (r)$$

relativamente à qual o 2.º membro é o termo geral de uma progressão aritmética cujo primeiro termo é $\log_a (u_1)$ e cuja razão é $\log_a (r)$, c.q.m.

- D. Consulte a página 134 do 2.º Volume do Infinito 12 (p.e.).

FIM

- (1) Como o domínio de g é \mathbb{R} , excluem-se de imediato as funções definidas por $g(x) = \ln\left(\frac{3-x}{e}\right)$ e $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

Qualquer uma das restantes verifica a condição relativa à assíntota, pois $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-e^{x-2}) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2^{x-2}) = 0$.

Vejamos quais as derivadas destas funções no ponto $x = 2$:

Como

$$g'_1(x) = (-e^{x-2})' = -(x-2)' \cdot e^{x-2} = -e^{x-2}$$

e

$$g'_2(x) = (-2^{x-2})' = -\ln 2 \times (x-2)' \cdot 2^{x-2} = -\ln 2 \times 2^{x-2},$$

então $g'_1(2) = -1$ e $g'_2(2) = -\ln 2 \neq -1$.

- (2) Como $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = -1 = g(2)$, então terá de ser $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -1$.

Donde, $\lim_{x \rightarrow 2^-} (\ln(k-x) - 1) = -1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} (\ln(k-x)) = 0 \Leftrightarrow k = 3$, pois $\lim_{y \rightarrow 1^+} (\ln y) = 0$.

(3)
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\lim_{m \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}.$$

- (4) A informação relevante para a escolha será: O gráfico tem a concavidade voltada para baixo em $] -2, 0[$ ($g''(x) < 0$ para $-2 < x < 0$) e possui um ponto anguloso em $x = 1$ ($g'(1)$ não existe).

- (5) Tendo em conta as propriedades do Triângulo de Pascal, será $10 = {}^n C_{n-1} \Leftrightarrow 10 = {}^n C_{n-1} \Leftrightarrow 10 = \frac{n!}{1 \times (n-1)!} \Leftrightarrow 10 = n$.

Logo, o elemento pedido é ${}^{10}C_2 = \frac{10!}{2! \times 8!} = 45$.