Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

28/02/2000 **Turmas A, B e C - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1-a)*	*1-b)*	*2*	*3*	*4*
Prova 1	**C**	**A**	**D**	**D**	**A**
Questão	*4-a)*	*4-b)*	*3*	*1*	*2*
Prova 2	**F**	**G**	**G**	**F**	**H**

2.ª Parte

1. Os comprimentos dos onze segmentos estão em progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$, pelo que a soma dos comprimentos dos primeiros n segmentos é dada por $S_n = 6 \times \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}}$.

Assim, em centímetros, o comprimento total da espiral, nas condições propostas, será dada por:

$$\lim\ S_n = \lim\ (6 \times \frac{1-(\frac{3}{4})^n}{1-\frac{3}{4}}) = 24 \times \lim\ (1-(\frac{3}{4})^n) = 24 \times (1-0) = 24\ .$$

Se continuássemos a espiral indefinidamente, o seu comprimento total seria 24 centímetros.

2.

a) Consideremos a função C e o intervalo $[2;2{,}5]$.
A função C é contínua no intervalo considerado, pois sendo a composta de funções contínuas é contínua no seu domínio; consequentemente é contínua em qualquer intervalo fechado contido no seu domínio.
Ora,

- $C(2) = 27 - 18 \times e^{-2} \approx 24{,}56$
- $C(2{,}5) = 27 - 18 \times e^{-2{,}5} \approx 25{,}52$

Portanto, $C(2) < 25 < C(2{,}5)$.

Assim, de acordo com o teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists t_1 \in]2, 2{,}5[: C(t_1) = 25$.
Consequentemente, houve um instante, entre as 9 horas e as nove horas e trinta minutos, em que a temperatura da água foi de 25º C.

b) Ora,

$$C(t) = 25 \Leftrightarrow 27 - 18.e^{-t} = 25 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow -t = \ln\frac{1}{9} \Leftrightarrow -t = 0 - \ln 9 \Leftrightarrow t = \ln 9\ .$$

Como $\ln 9 \approx 2{,}19722$ e $60 \times 0{,}19722 = 11{,}8322$, então a temperatura da água foi de 25º C aproximadamente às 9 horas e 12 minutos.

c1) Sendo $y = 27 - 18.e^{-x}$, vem $e^{-x} = \frac{27-y}{18} \Leftrightarrow -x = \ln\frac{27-y}{18} \Leftrightarrow x = -\ln\frac{27-y}{18} \Leftrightarrow x = \ln\frac{18}{27-y}$.

Como que $D_c = \{x \in IR : -x \in IR\} = IR$ e $D'_c = \{y \in IR : \frac{18}{27-y} > 0\} =]-\infty, 27[$, será: $c^{-1} : \ ]-\infty, 27[\to IR$, $x \to \ln\frac{18}{27-x}$

c2) Como a função é contínua em *IR*, então $\lim\limits_{x\to a^{\pm}} c(x) = c(a), \forall x \in IR$.

Assim, não existe qualquer assimptota vertical ao gráfico de *c*.

Determinação das assimptotas não verticais:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{27-18.e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{27}{x} - \frac{18}{x}e^{-x}) = 0 - 0\times 0 = 0\,;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (c(x) - 0\times x) = \lim_{x\to+\infty} (27 - 18.e^{-x}) = 27 - 18\times 0 = 27\,.$$

Logo, $y = 27$ é equação de uma assimptota horizontal do gráfico da função em torno de $+\infty$.

Como

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{27-18.e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} (\frac{27}{x} - 18\frac{e^{-x}}{x}) = 0 - 18\times \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{-y} = 18\times \lim_{y\to+\infty} \frac{e^{y}}{y} = +\infty$$

o gráfico da função não admite qualquer assimptota não vertical em torno de $-\infty$.

3. Como $a > 1$, então $\log_a \frac{1}{2} < 0$.

O erro ocorreu na última passagem, pois dividimos os dois membros da inequação por um número negativo ($\log_a \frac{1}{2}$), pelo que o sinal da desigualdade deveria ter sido trocado.

4.

a1) As derivadas laterais no ponto considerado, são ambas negativas.
À esquerda, a semi-recta tangente ao gráfico da função no ponto considerado é uma semi-recta com declive negativo (inclinação superior a 90º).
À direita, a semi-recta tangente ao gráfico da função no ponto considerado é uma semi-recta vertical, cuja posição de tangência provém de situações de secante com declives negativos.

a2) $$h'(2^-) = \lim_{x\to2^-} \frac{(\frac{1}{x} - x) - (\frac{1}{2} - 2)}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{\frac{2-2x^2+3x}{2x}}{x-2} = \lim_{x\to2^-} \frac{2-2x^2+3x}{2x.(x-2)} = \lim_{x\to2^-} \frac{(x-2)(-2x-1)}{2x.(x-2)} = \lim_{x\to2^-} \frac{-2x-1}{2x} = -\frac{5}{4}.$$

Ou, fazendo com "*h*":

$$h'(2^-) = \lim_{h\to0^-} \frac{(\frac{1}{2+h} - (2+h)) + \frac{3}{2}}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{\frac{2-2(2+h)^2+3(2+h)}{2(2+h)}}{h} = \lim_{h\to0^-} \frac{2-8-8h-2h^2+6+3h}{h\times 2(2+h)} = \lim_{h\to0^-} \frac{-5h-2h^2}{h\times 2(2+h)} = \lim_{h\to0^-} \frac{-5-2h}{2(2+h)} = -\frac{5}{4}$$

a3) A semi-recta tem origem em A $(2, h(2))$ e o seu declive é $m = h'(2^-) = -\frac{5}{4}$, logo um vector director é $\vec{u} = (-4, 5)$.

Assim, $(x, y) = (2, -\frac{3}{2}) + k.(-4,5),\ k \in R_0^+$ define vectorialmente a semi-recta pedida.

b) *Determinação das assimptotas verticais*:

$$\lim_{x\to0^{\mp}} h(x) = \lim_{x\to0^{\mp}} (\frac{1}{x} - x) = \frac{1}{0^{\mp}} + 0 = \mp\infty$$

Logo, $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral. (A lateral direita já observada no gráfico de *f*)

$$\lim_{x\to2^+} h(x) = \lim_{x\to2^+} (2 - \frac{x}{x-2}) = 2 - \frac{2}{0^+} = -\infty \quad \text{e, como já se sabe,} \quad \lim_{x\to2^-} h(x) = \lim_{x\to2^-} (\frac{1}{x} - 2) = -\frac{3}{2}.$$

Logo, $x = 2$ é equação de uma assimptota vertical unilateral direita. (Já observado no gráfico de *f*)

Determinação das assimptotas não verticais:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2}) = 0\,;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (h(x) - 0\times x) = \lim_{x\to+\infty} (2 - \frac{x}{x-2}) = 2 - 1 = 1\,.$$

Logo, $y = 1$ é equação de uma assimptota horizontal em torno de $+\infty$. (Já observável no gráfico de *f*)

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x}{x} = \lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{x^2} - 1) = -1\,;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (h(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} (\frac{1}{x} - x + x) = 0\,.$$

Logo, $y = -x$ é equação de uma assimptota oblíqua em torno de $-\infty$.

5.

a) Tendo em consideração algumas propriedades operatórias dos logaritmos e que a função logarítmica é injectiva, resolvendo a equação em ordem a *y*, vem:

$$\begin{aligned}\log y = \log 6 + 0{,}9\log x &\Leftrightarrow \log y = \log 6 + \log(x^{0,9})\\ &\Leftrightarrow \log y = \log(6 \times x^{0,9})\\ &\Leftrightarrow y = 6.x^{0,9}\end{aligned}$$

b) Ora,
$y_2 = 6 \times (x_2)^{0,9} \Leftrightarrow y_2 = 6 \times (100x)^{0,9} \Leftrightarrow y_2 = 6.x^{0,9} \times 100^{0,9} \Leftrightarrow y_2 = y \times 100^{0,9}$.

Portanto, $\frac{y_2}{y} = 100^{0,9} \approx 63{,}1$.

O resultado obtido pode ser interpretado da seguinte maneira: *Quando o peso duma colónia destes animais aumenta 100 vezes, o volume de oxigénio consumido aumenta (apenas) cerca de 63 vezes*.

6.

a) O ás pode ser obtido de ${}^4C_1 = 4$ maneiras; os dois reis podem ser obtidos de ${}^4C_2 = 6$ maneiras; e as restantes duas cartas da mão (diferentes de ases e reis) podem ser obtidas de ${}^{44}C_2 = 946$ maneiras.

O número de mãos diferentes possíveis de obter é ${}^{52}C_5 = 2598960$.

Assim, a probabilidade pedida é: $p = \frac{{}^4C_1 \times {}^4C_2 \times {}^{44}C_2}{{}^{52}C_5} = \frac{4 \times 6 \times 946}{2598960} = \frac{473}{54145} \approx 0{,}0087$.

b) Tendo em consideração que $p(\overline{M}) = 1 - p(M)$ e que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, vem:

- $p(\text{a carta ser ás ou copas}) = 1 - p(\text{a carta não ser ás nem copas}) = 1 - 0{,}62 = 0{,}38$
- $p(\text{a carta ser ás ou copas}) = p(\text{ás}) + p(\text{copas}) - p(\text{a carta ser o ás de copas})$

Da última igualdade, temos:

$$0{,}38 = 0{,}12 + 0{,}3 - p(\text{a carta ser o ás de copas}) \Leftrightarrow p(\text{a carta ser o ás de copas}) = 0{,}04\,.$$

Como $p(\text{a carta ser o ás de copas}) = 0{,}04 = \frac{1}{25}$, dado que o baralho contém apenas um ás de copas, podemos concluir que, tendo ficado 25 cartas, foram retiradas 27 cartas do baralho.

FIM

---

(1) Como a recta de equação $y = -x + 1$ é uma assimptota do gráfico de *g* em torno de $-\infty$, então $\lim_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$.
Tendo em consideração a definição de Heine, como $\lim x_n = -2 - \infty = -\infty$, então $\lim g(x_n) = +\infty$.

(2) $\lim_{x \to -2^+} \frac{g(x)}{x+2} = \frac{\lim_{x \to -2^+} g(x)}{\lim_{x \to -2^+} (x+2)} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$;
Como a recta de equação $y = -x + 1$ é uma assimptota do gráfico de *g* em torno de $-\infty$, então $\lim_{x \to -\infty} [g(x) - (-x+1)] = 0$.
Donde, $\lim_{x \to -\infty} [g(x) - (-x+1)] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} [g(x) + x - 1] = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to -\infty} [g(x) + x] = 1$.

(3) Uma alternativa é constatar que nos instantes 1 e 3 segundos após a partida o ponto P está à mesma distância de E.

(4) Para ser possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função *m* no intervalo $\left[-\frac{1}{e}, e\right]$ é necessário que a função seja contínua nesse intervalo. Como é garantida a continuidade da função em $IR\backslash\{0\}$, há que garantir a sua continuidade em $x = 0$, pelo que terá de se verificar: $\lim_{x \to 0^-} m(x) = \lim_{x \to 0^+} m(x) = m(0)$. Assim, $0 + 1 + k = \ln\frac{1}{e} = 1 + k$, donde $-1 = 1 + k \Leftrightarrow k = -2$.

(5) Como $\log_a(b^2) = c \Leftrightarrow 2\log_a(b) = c \Leftrightarrow \log_a(b) = \frac{c}{2}$, então $\log_a(ab) = \log_a(a) + \log_a(b) = 1 + \frac{c}{2}$.