

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

13/12/99

Turmas A, B e C - Provas 1 e 2

12.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾	6 ⁽⁶⁾	7 ⁽⁷⁾
Questão	1-a)	1-b)	2	3	4	5	6
Prova 1	C	C	C	A	B	C	B
Questão	6-a)	6-b)	1	4	5	3	2
Prova 2	G	F	E	G	G	E	H

2.ª Parte

1.

a) $N(0) = N_0 \times 2^0 = N_0 \times 1 = N_0$

$N(k) = N_0 \times 2^1 = 2N_0$.

N_0 representa o número de células no instante inicial da contagem do tempo.

k representa o instante (em segundos) em que o número de células é o dobro do número de células no instante inicial.

b) Para $N_0 = 100$ e $k = 100$, temos $N(t) = 100 \times 2^{\frac{t}{100}}$.

Ora, $N(t) = 16 \times 100 \Leftrightarrow 100 \times 2^{\frac{t}{100}} = 16 \times 100 \Leftrightarrow 2^{\frac{t}{100}} = 2^4 \Leftrightarrow \frac{t}{100} = 4 \Leftrightarrow t = 400$.

O número de células torna-se 16 vezes maior do que no instante inicial decorridos 6 minutos e 40 segundos após esse instante.

2. Os dois rectângulos brancos podem ser escolhidos de 15 maneiras diferentes, pois são escolhidos de um grupo de

6, não interessando a ordem e não podendo haver repetição - ${}^6C_2 = \frac{6!}{2! \times 4!} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$.

Seleccionados os dois rectângulos brancos, restam 4 que terão de ser pintados com quatro cores diferentes, escolhidas de entre 5.

Essas quatro cores podem ser escolhidas de ${}^5C_4 = \frac{5!}{4! \times 1!} = 5$ maneiras diferentes.

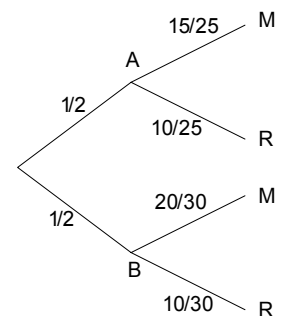
Permutando essas quatro cores pelos 4 rectângulos não brancos obtemos distintas maneiras de pintar o painel.

Assim, podemos pintar o painel de $15 \times 5 \times 4! = 75 \times 24 = 1800$ maneiras diferentes.

3. Pretende-se descobrir $p(B/M)$. Ora, (acompanhe o raciocínio com o diagrama ao lado)

$$\begin{aligned}
 p(B/M) &= \frac{p(B \cap M)}{p(M)} = \frac{p(B) \cdot p(M/B)}{p(A \cap M) + p(B \cap M)} \\
 &= \frac{p(B) \cdot p(M/B)}{p(A) \cdot p(M/A) + p(B) \cdot p(M/B)} \\
 &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{20}{30}}{\frac{1}{2} \times \frac{15}{25} + \frac{1}{2} \times \frac{20}{30}} \\
 &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{3}{10} + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{10}{30}}{\frac{9}{30} + \frac{10}{30}} = \frac{10}{19}
 \end{aligned}$$

A probabilidade de a aluna ser da turma B é de $\frac{10}{19}$.



M - rapariga

R - rapaz

4. Ao escolher aleatoriamente uma alternativa das quatro apresentadas em cada questão, a probabilidade de a acertar é $p = \frac{1}{4}$ e de errar essa mesma questão é $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

Podemos, portanto, resolver o problema pelas provas repetidas de Bernoulli, considerando que vamos repetir 7 vezes a prova, sempre nas mesmas condições, e em que são independentes os resultados em duas quaisquer provas, havendo apenas dois resultados possíveis em cada uma: a realização do sucesso (acertar a questão) com probabilidade $\frac{1}{4}$, ou a realização do seu contrário com probabilidade $\frac{3}{4}$.

Assim,

$$P(x=1) = {}^7C_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6 = 7 \times \frac{3^6}{4^7} \quad \text{e} \quad P(x=2) = {}^7C_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5 = 21 \times \frac{3^5}{4^7} = 7 \times \frac{3^6}{4^7}.$$

É, portanto, tão provável acertar apenas uma como apenas duas das 7 questões da 1.ª Parte da Prova.

Em alternativa, por exemplo, podemos considerar que os resultados são conjuntos ordenados de 7 elementos escolhidos do conjunto $\{A, B, C, D\}$ (designações das alternativas propostas) e utilizar a lei de Laplace. Deste modo, vem:

Acertar apenas uma questão:

$$NCP = {}^4A'_1 = 4^7$$

$$NCF = \underbrace{{}^7C_1}_{\text{n.º de maneiras de escolher a posição da resposta correcta}} \times \underbrace{{}^3A'_6}_{\text{n.º de maneiras de preencher 6 respostas erradas}} = 7 \times 3^6$$

Acertar apenas duas questões:

$$NCP = {}^4A'_2 = 4^7$$

$$NCF = \underbrace{{}^7C_2}_{\text{n.º de maneiras de escolher as posições das respostas correctas}} \times \underbrace{{}^3A'_5}_{\text{n.º de maneiras de preencher 5 respostas erradas}} = 21 \times 3^5 = 7 \times 3^6$$

Donde, a conclusão é exactamente a mesma.

5.

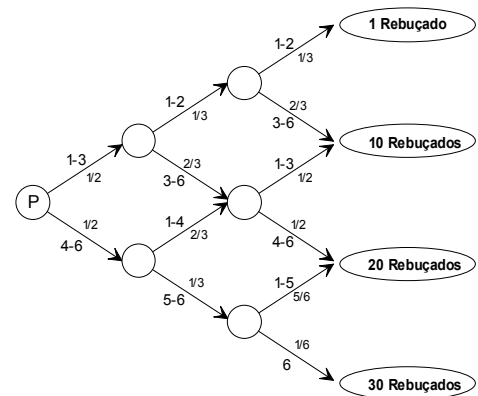
- a) Começemos por colocar no diagrama os valores das probabilidades correspondentes aos respectivos avanços. Agora, temos:

$$p(X=1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18} = \frac{2}{36}$$

$$p(X=10) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{18} + \frac{2}{12} + \frac{2}{12} = \frac{16}{36}$$

$$p(X=20) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{5}{6}\right) = \frac{2}{12} + \frac{2}{12} + \frac{5}{36} = \frac{17}{36}$$

$$p(X=30) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$



b) $\bar{X} = \frac{2}{36} \times 1 + \frac{16}{36} \times 10 + \frac{17}{36} \times 20 + \frac{1}{36} \times 30 = 14 + \frac{7}{9} = \frac{133}{9} \approx 14,778$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{36} \times (1 - \frac{133}{9})^2 + \frac{16}{36} \times (10 - \frac{133}{9})^2 + \frac{17}{36} \times (20 - \frac{133}{9})^2 + \frac{1}{36} \times (30 - \frac{133}{9})^2} \approx 6,325$$

A esperança matemática e o desvio padrão da variável aleatória X são, respectiva e aproximadamente, 14,778 e 6,325 rebuçados.

6. Como sabemos, a fórmula do binómio de Newton pode tomar a forma: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n {}^nC_k \times a^k \times b^{n-k}$, com $n \in \mathbb{N}$.

Ora, $\sum_{k=0}^{10} (2^k \times {}^{10}C_k) = \sum_{k=0}^{10} (2^k \times {}^{10}C_k \times 1^{10-k}) = \sum_{k=0}^{10} ({}^{10}C_k \times 2^k \times 1^{10-k}) = (2+1)^{10} = 3^{10} = 59049$, cqm.

7. Sabendo que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, como os acontecimentos A e B são incompatíveis, então $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$, pois $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$.

Nestas circunstâncias, por definição de probabilidade condicionada vem sucessivamente:

$$\begin{aligned}
 p((A \cup B)/C) &= \frac{p((A \cup B) \cap C)}{p(C)} \\
 &= \frac{p((A \cap C) \cup (B \cap C))}{p(C)}, \text{ pela propriedade distributiva} \\
 &= \frac{p(A \cap C) + p(B \cap C) - p((A \cap C) \cap (B \cap C))}{p(C)} \\
 &= \frac{p(A \cap C)}{p(C)} + \frac{p(B \cap C)}{p(C)} - \frac{p((A \cap B) \cap C)}{p(C)} \\
 &= \frac{p(A \cap C)}{p(C)} + \frac{p(B \cap C)}{p(C)} - \frac{p(\emptyset \cap C)}{p(C)}, \text{ pois A e B são disjuntos} \\
 &= \frac{p(A \cap C)}{p(C)} + \frac{p(B \cap C)}{p(C)} - \frac{0}{p(C)} \\
 &= p(A/C) + p(B/C)
 \end{aligned}$$

Logo, $p((A \cup B)/C) = p(A/C) + p(B/C)$, para $p(C) > 0$ e com A e B acontecimentos incompatíveis.

8.

A)

1) A propriedade é verificada para $n = 1$, pois $A(1) = 9^1 - 2^1 = 7$ e 7 é múltiplo de 7.

2) Sendo p um número natural, provemos de seguida que $A(p)$ é múltiplo de 7 $\Rightarrow A(p+1)$ é múltiplo de 7.

Hipótese: $A(p) = 9^p - 2^p$ é múltiplo de 7

Tese: $A(p+1) = 9^{p+1} - 2^{p+1}$ é múltiplo de 7.

Ora,

$$\begin{aligned}
 A(p+1) &= 9^{p+1} - 2^{p+1} \\
 &= 9 \times 9^p - 2 \times 2^p \\
 &= 7 \times 9^p + 2 \times 9^p - 2 \times 2^p \\
 &= 2 \times \underbrace{(9^p - 2^p)}_{\substack{\text{múltiplo de 7, por hipótese} \\ \text{múltiplo de 7}}} + \underbrace{7 \times 9^p}_{\text{múltiplo de 7}}
 \end{aligned}$$

Portanto, $A(p+1) = 9^{p+1} - 2^{p+1}$ é múltiplo de 7.

Assim, por 1) e 2), concluímos que $A(n) = 9^n - 2^n$ é múltiplo de 7, $\forall n \in \mathbb{N}$.

B)

1) A propriedade é verificada para $n = 1$, pois $\sum_{k=1}^1 k = \frac{1^2 + 1}{2} \Leftrightarrow 1 = \frac{2}{2}$ é uma afirmação verdadeira.

2) Sendo p um número natural, provemos de seguida que $\sum_{k=1}^p k = \frac{p^2 + p}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{(p+1)^2 + p + 1}{2}$.

Hipótese: $\sum_{k=1}^p k = \frac{p^2 + p}{2}$

Tese: $\sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{(p+1)^2 + p + 1}{2}$

Ora,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^p k &= \frac{p^2 + p}{2} \Leftrightarrow \sum_{k=1}^p k + (p+1) = \frac{p^2 + p}{2} + (p+1) \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{p^2 + p + 2p + 2}{2} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{(p^2 + 2p + 1) + (p+1)}{2} \\ &\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{(p+1)^2 + (p+1)}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $\sum_{k=1}^p k = \frac{p^2 + p}{2} \Rightarrow \sum_{k=1}^{p+1} k = \frac{(p+1)^2 + p + 1}{2}$.

Assim, por 1) e 2), concluímos que $\sum_{k=1}^n k = \frac{n^2 + n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

FIM

- (1) Como as duas distribuições possuem igual média, então as duas curvas de Gauss têm a mesma localização. Como a distribuição relativa aos rapazes apresenta menor desvio padrão, então menor será a dispersão em torno de \bar{x} .
- (2) Numa distribuição normal, sabemos que a área, sob a respectiva curva de Gauss, no intervalo $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$ é, aproximadamente, 68%. Ora, no caso presente, $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma] =]170 - 5, 170 + 5[=]165, 175[$. Assim, a percentagem dos rapazes que se espera que tenham altura superior a 165 cm é aproximadamente $68\% + \frac{100\% - 68\%}{2} = 84\%$.
- (3) Basta reparar, por exemplo, que, numa volta completa, a distância máxima será apenas obtida uma vez, no ponto diametralmente oposta a A, sendo essa distância de 2 unidades (diâmetro da circunferência).
- (4) A probabilidade pedida corresponde ao quociente entre a área sombreada e a área do quadrado.
Assim, $p = \frac{1^2 - \frac{\pi \times 1^2}{4}}{1^2} = 1 - \frac{\pi}{4} = \frac{4 - \pi}{4}$.
- (5) Considerando não interessar a ordem e não podendo haver repetição, será:
O número de casos possíveis é ${}^{20}C_2 = 190$.
Há 19 casos favoráveis: 1,2; 2,3; 3,4;...; 18,19 e 19, 20.
Logo, $p = \frac{19}{190} = 10\%$.
- (6) Vá eliminando alternativas, considerando as condições dadas e tendo presente como se obtém graficamente o gráfico do módulo de uma função.
- (7) Basta ter presente as seguintes propriedades do triângulo de Pascal:
«Cada linha do triângulo de Pascal começa e acaba em 1.»
«Em cada linha são iguais os números equidistantes dos extremos.»
«Adicionando dois números consecutivos de uma linha, obtém-se o número colocado abaixo, na linha seguinte.»

O Professor