Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

25/10/99 **Turmas A., B e C - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**B**	**C**	**B**	**B**	**D**
Questão	*4*	*5*	*1*	*3*	*2*
Prova 2	**G**	**F**	**H**	**G**	**F**

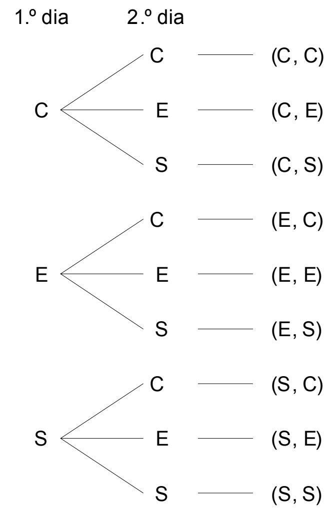
2.ª Parte

1.

a) Consideremos o diagrama em árvore.
Podemos concluir que o conjunto de resultados é:

$\Omega = \{(C,C),(C,E),(C,S),(E,C),(E,E),(E,S),(S,C),(S,E),(S,S)\}$.

O espaço de acontecimentos é constituído por 512 elementos:
$\# P(\Omega) = {}^9C_0 + {}^9C_1 + \ldots {}^9C_8 + {}^9C_9 = (1+1)^9 = 2^9 = 512$.



b) *K*: "*Apenas chover no primeiro dia*";
W: "*Nunca chover*".

c1) Os casos favoráveis são: $(C,E),(C,S),(E,C),(S,C)$.

Logo, a probabilidade pedida é $p = \frac{4}{9}$.

c2) Os casos favoráveis são: $(C,E),(C,S),(E,C),(E,S),(S,C),(S,E)$.

Logo, a probabilidade pedida é $p = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

2. Sabendo que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - P(A \cap B)$, vem $P(A \cap B) = 0{,}4 + 0{,}2 - 0{,}5 = 0{,}1$.
Logo, $p(\overline{A} \cup \overline{B}) = p(\overline{A \cap B}) = 1 - p(A \cap B) = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$.

3.

a)

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

b) Basta considerar duas das 3 propriedades seguintes:
«Cada linha do triângulo de Pascal começa e termina em 1.»

$${}^nC_0 = {}^nC_n = 1, \ \forall n \in N_0$$

«Em cada linha são iguais os números equidistantes dos extremos.»

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}, \ \forall n \in N_0, \forall p \in N_0, p \le n$$

«Adicionando dois números consecutivos de uma linha, obtém-se o número colocado abaixo, na linha seguinte.»

$${}^nC_p + {}^nC_{n+1} = {}^{n+1}C_{n+1}, \ \forall n \in N_0, \forall p \in N_0, p < n$$

c) Consideremos a seguinte fórmula do binómio de Newton: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k . a^{n-k} . b^k$.

O termo de grau 4 obtém-se para $k = 4$, sendo $n = 7$.

Assim, o termo pedido é ${}^7C_4 .(\tfrac{1}{2})^{7-4} .(4y)^4 = 35 \times \dfrac{1}{8} \times 256y^4 = 1120y^4$.

d)

$$\begin{aligned}(\tfrac{1}{2}+4y)^4 &= {}^4C_0.(\tfrac{1}{2})^4.(4y)^0 + {}^4C_1.(\tfrac{1}{2})^3.(4y)^1 + {}^4C_2.(\tfrac{1}{2})^2.(4y)^2 + {}^4C_3.(\tfrac{1}{2})^1.(4y)^3 + {}^4C_4.(\tfrac{1}{2})^0.(4y)^4 \\ &= 1 \times \tfrac{1}{16} + 4 \times \tfrac{1}{8} \times 4y + 6 \times \tfrac{1}{4} \times 16y^2 + 4 \times \tfrac{1}{2} \times 64y^3 + 1 \times 256y^4 \\ &= 256y^4 + 128y^3 + 24y^2 + 2y + \tfrac{1}{16}\end{aligned}$$

4.

a1) Como os botões são todos iguais, as disposições não diferem pelas suas trocas nas casas seleccionadas, mas apenas pelas casas ocupadas.
Assim, trata-se de determinar apenas quantas maneiras diferentes há ao considerar 4 das 16 casas do tabuleiro, isto é, determinar quantos subconjuntos de 4 elementos se podem definir a partir de um conjunto de 16 elementos.

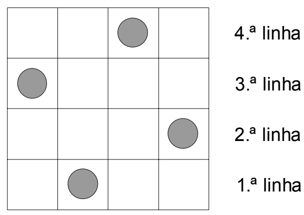
Há, portanto, ${}^{16}C_4 = \dfrac{16!}{12! \times 4!} = \dfrac{16 \times 15 \times 14 \times 13}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4 \times 5 \times 7 \times 13 = 1820$ disposições dos 4 botões.

a2) Existem duas diagonais. Consideremos, para já, a diagonal principal.
Tendo em consideração o que foi dito na alínea anterior, podemos concluir que há 4 possibilidades para colocar 3 botões nessa diagonal - ${}^4C_3 = 4$ - (fica, de cada vez, uma dessas 4 casas sem botão). Resta colocar 1 botão, que pode ocupar qualquer uma das restantes 12 casas que não pertencem a essa diagonal.

Para esta situação haverá ${}^4C_3 \times {}^{12}C_1 = 4 \times 12 = 48$ disposições possíveis.

Se considerarmos agora a possibilidade da outra diagonal obtemos igual número de disposições.
Assim, são possíveis 96 disposições com 3 botões apenas sobre a mesma diagonal.

a3) Consideremos uma dessas disposições (ver figura).
Ao colocarmos 1 botão na 1.ª linha, podemos fazê-lo de 4 maneiras distintas. Ao colocarmos o 2.º botão na 2.ª linha, há agora apenas 3 possibilidades, pois temos de nos desviar da coluna ocupada pelo botão da 1.ª linha. Como facilmente se conclui, o número de possibilidades de colocar um botão na próxima linha vai diminuindo sucessivamente de uma unidade.
Portanto, com um único botão sobre a mesma linha e a mesma coluna, são possíveis $P_4 = 4! = 24$ disposições.



b) Eliminando as casas que constituem as diagonais restam 8 casas.

Os quatro botões ocuparão apenas 4 dessas casas, podendo ser ocupadas de ${}^8C_4 = 70$ maneiras diferentes.

Como agora os botões são diferentes, as permutações dos 4 botões nas casas consideradas em cada uma dessas 70 maneiras originarão disposições diferentes.

Logo, há ${}^8C_4 \times P_4 = 70 \times 24 = 1680$ disposições diferentes.

5. Comecemos por determinar quais as 3 parcelas que podem constituir a soma 6:
Há 3 situações distintas para obter soma 6 com 3 parcelas.

$6 = 1 + 1 + 4 \quad (A)$

$6 = 1 + 2 + 3 \quad (B)$

$6 = 2 + 2 + 2 \quad (C)$

Na situação (A) existem 3 maneiras para obter soma 6: $1+1+4$, $1+4+1$ e $4+1+1$.
Na situação (B) existem 6 maneiras para obter soma 6: $P_3 = 6$.
Na situação (C) existe apenas uma maneira.
Portanto, são 10 os casos favoráveis.

Os casos possíveis são $12^3 = {}^{12}A'_3$, pois cada vez que a roda gira sairá 1 dos 12 valores possíveis.

Portanto, a probabilidade pedida é $p = \dfrac{10}{12^3} \approx 0{,}005787$.

Com aproximação às milésimas, será $p = 0{,}006$.

FIM

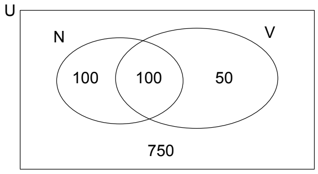
(1) Podemos escolher 2 vértices do pentágono e um vértice do quadrilátero, ou 2 vértices do quadrilátero e um do pentágono.
Assim, há ${}^5C_2 \times {}^4C_1 + {}^4C_2 \times {}^5C_1 = 10 \times 4 + 6 \times 5 = 70$ triângulos nessas circunstâncias.

(2) Como essa linha possui 7 elementos, então $n = 6$ (note que n começa em 0). A letra d representa o 4.º elemento dessa linha, logo $p = 3$ (note que p começa em 0).

(3) Podemos sentar os rapazes nas cadeiras numeradas com números ímpares e as raparigas nas numeradas com números pares, ou vice-versa. Logo, temos 2 possibilidades. Em qualquer uma dessas situações, podemos em seguida permutar o grupo dos 6 rapazes e o grupo das 6 raparigas. Portanto, o $NCF = 2 \times P_6 \times P_6$.

Os casos possíveis resultam da permutação dos 12 jovens nas 12 cadeiras da roda gogante. Logo, o $NCP = P_{12}$.

(4)



Sabemos que $\# N = 200$, $\# V = 150$ e $\# U = 1000$.
Considere o diagrama da figura acima.

Ora, $\# U = \# N + \# V - \#(N \cap V) + 750$. Logo, $\#(N \cap V) = 750 + 200 + 150 - 1000 = 100$, pelo que podemos concluir sobre o número de elementos mencionados no diagrama.

Assim, $p = \dfrac{\#(N \cup V)}{\# U} = \dfrac{250}{1000} = 0{,}25 = 25\%$.

(5) Sabemos que $p(5) = \frac{1}{4} = 0{,}25$ e $p(4) = \frac{1}{5} = 0{,}2$.

Logo,

$p(\text{sair 5 ou 4}) = p(5) + p(4) = 0{,}25 + 0{,}20 = 0{,}45$;
$p(\text{não sair 4}) = 1 - p(4) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$;
$p(\text{sair 4 e 5}) = 0$, pois os acontecimentos são incompatíveis;
$p(\text{não sair 4 nem 5}) = p(\overline{\text{sair 4 ou 5}}) = 1 - p(\text{sair 4 ou 5}) = 1 - 0{,}45 = 0{,}55$.

O Professor