Escola Secundária da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

05/03/99 **Turma A - Prova 2** **12.º Ano**

Nome: ________________________________	*N.º:* ____ *Turma:* ___

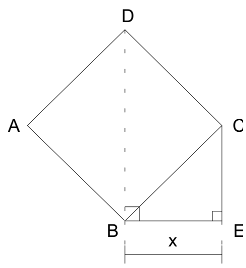
1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 9 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação****: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Os clientes de um banco devem escolher um código, formado por quatro algarismos de 0 a 9, de tal forma que não haja algarismos repetidos em posições consecutivas.
(Assim, o código "0120" é válido, mas "2114" não é.)
O número de códigos válidos é:

[E] 7290. **[F]** 8100. **[G]** 9000. **[H]** 7361.

2. Na figura, [ABCD] é um quadrado e [BCE] é um triângulo rectângulo.

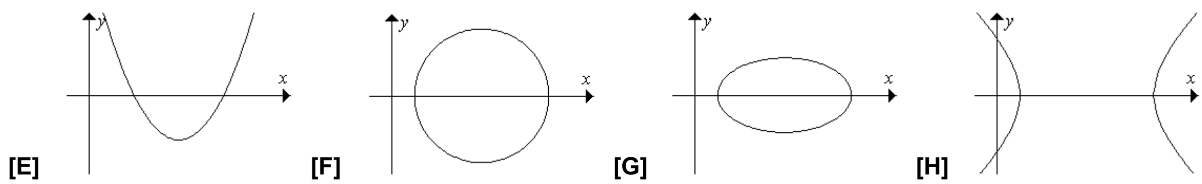


O valor do produto escalar $\vec{DC} . \vec{BE}$ é:

[E] $\dfrac{\sqrt{2}.x}{2}$. **[F]** $\dfrac{x^2}{2}$.

[G] x^2. **[H]** $\sqrt{2}.x^2$.

3. Considere, num referencial o.n. *xOy*, os pontos *A* (2, 0) e *B* (6, 0).
Indique qual das figuras seguintes pode representar o conjunto de pontos *P* do plano tais que $\overline{PA} + \overline{PB} = 5$.



4. Num referencial ortonormado, relativamente à hipérbole de equação $y^2 - 8x^2 = 8$

[E] $F_1(0, 3)$ é um dos seus focos. **[F]** A recta de equação $y = \dfrac{x}{\sqrt{8}}$ é uma assimptota.

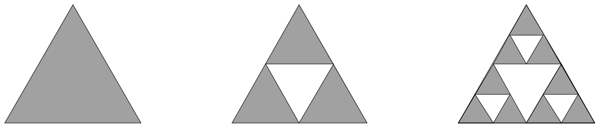
[G] $V_1(-\sqrt{8}, 0)$ é um dos seus vértices. **[H]** Nenhuma das respostas anteriores é verdadeira.

5. A pressão da água do mar varia com a profundidade. Sabe-se que a pressão da água ao nível do mar é de 1 atm (atmosfera) e que a cada 5 m de profundidade a pressão sofre um acréscimo de 0,5 atm.
A expressão que dá a pressão *p*, em atmosferas, em função da profundidade *h*, em metros, é:

[E] $p = 0{,}1h$. **[F]** $p = 1 + 0{,}5h$. **[G]** $p = 0{,}5h$. **[H]** $p = 1 + 0{,}1h$.

6. A figura ao lado mostra uma sequência de triângulos de Sierpinsky.

O processo começa no nível zero, com um triângulo equilátero de área 1. Em cada passo a seguir, cada triângulo equilátero é dividido através dos segmentos que ligam os pontos médios dos seus lados e é eliminado o triângulo central assim formado. A área que resta no nível n (indicada nas figuras pelo sombreado) é dada por:



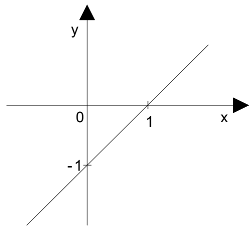
Nível 0 ***Nível 1*** ***Nível 2*** ...

[E] $(\frac{1}{4})^n$. **[F]** $(\frac{3}{4})^n$. **[G]** $1-(\frac{3}{4})^n$. **[H]** $1-(\frac{1}{4})^n$.

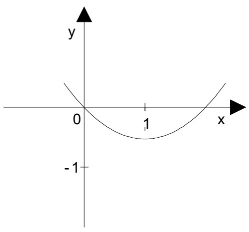
7. Se o vector $\vec{u}$ é perpendicular aos vectores $\vec{v}=(1,0,1)$ e $\vec{w}=(1,1,0)$, então $\vec{u}$ é paralelo ao vector:

[E] $(1,1,-1)$. **[F]** $(0,1,1)$. **[G]** $(-1,1,-1)$. **[H]** $(-1,1,1)$.

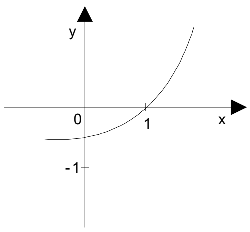
8. O gráfico ao lado é o da derivada *g'* de uma função *g*.



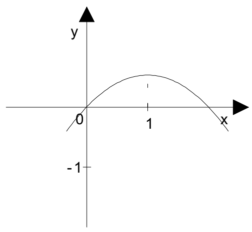
Um gráfico possível para *g* é:



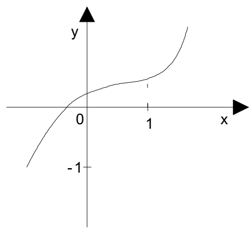
[E]



[F]



[G]



[H]

9. Lançou-se três vezes ao ar uma moeda equilibrada, tendo saído sempre a face *cara*.
Qual é a probabilidade de, num quarto lançamento, sair a face *coroa*?

[E] $\frac{3}{4}$. **[F]** $\frac{2}{3}$. **[G]** $\frac{1}{2}$. **[H]** $\frac{1}{4}$.

2.ª Parte

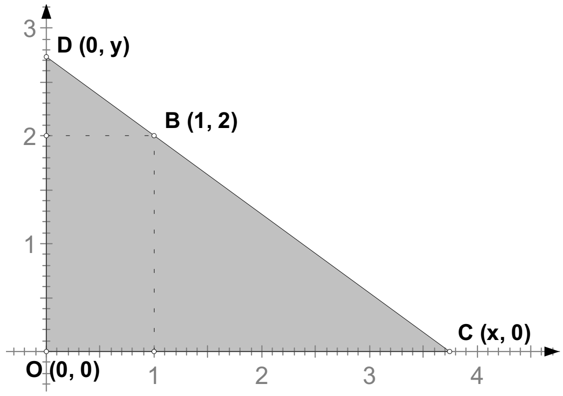
Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Um clube de fotografia, *FotoFixe*, é constituído por 25 membros: 15 raparigas e 10 rapazes.
A presidente do clube é uma rapariga.
Pretende-se constituir uma comissão para organizar uma exposição de material fotográfico. A comissão deve ser formada por 4 raparigas e 3 rapazes. Acordou-se que uma das 4 raparigas da comissão será necessariamente a presidente do clube.

a) Quantas comissões diferentes se pode constituir?

b) Admita que os 7 membros da comissão, depois de constituída, vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros.
Supondo que eles se colocam ao acaso, qual é a probabilidade de os rapazes ficarem todos juntos?
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

2. No referencial ortonormado da figura, considere:



- Seja B, um ponto de coordenadas (1, 2).
- A cada ponto C (x, 0) do eixo Ox, com $x > 1$, faz-se corresponder um ponto D (0, y) do eixo Oy, de modo que B, C e D sejam colineares.

a) Mostre que:

a1) $y = \dfrac{2x}{x-1}$ exprime y em função de x (para $x > 1$).

a2) A área $A(x)$ do triângulo [OCD] é dada por

$$A(x) = \frac{x^2}{x-1} \qquad (x > 1).$$

a3) $A'(x) = \dfrac{x.(x-2)}{(x-1)^2}$ (*A' designa a derivada de A*).

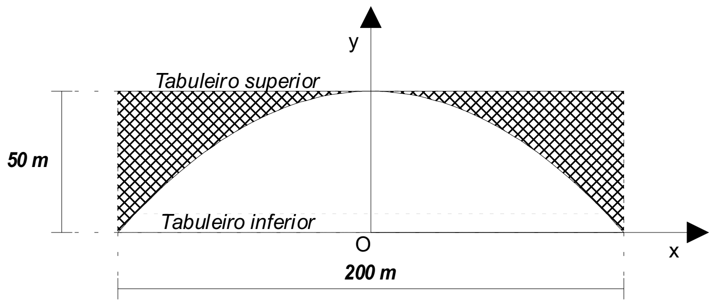
b) Determine o maior intervalo onde A é crescente e o maior intervalo onde é decrescente.

c) Determine, com aproximação às centésimas, o perímetro do triângulo [OCD] que tem área mínima.

d) Estude a existência de assimptotas ao gráfico da função A.

NOTA: Tenha presente que $D_A = \left]1, +\infty\right[$.

3. O esquema seguinte é um excerto de um trabalho realizado por alunos do 10.º ano, no âmbito da Área-Escola.

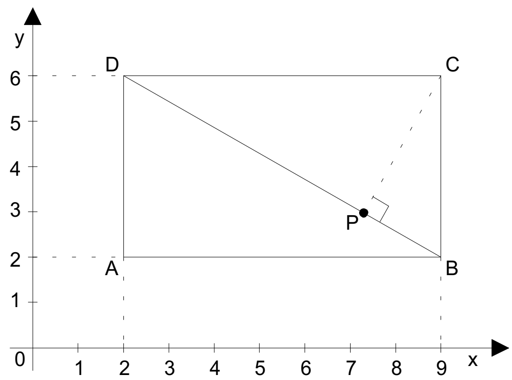


Utilizando os valores registados, o referencial associado (a unidade é o metro) e admitindo que o arco representado é um arco de parábola, mostre que

$$y = -\frac{1}{200}x^2 + 50$$

é uma equação da parábola que contém esse arco e determine as coordenadas do foco dessa parábola e a equação da directriz

4. Observe a figura, onde [ABCD] é um rectângulo.



a) Determine uma equação da elipse inscrita no rectângulo [ABCD].

b) Que pode afirmar sobre os vectores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AC}$, se verificam a condição $\vec{u}.\overrightarrow{AC} = -\|\vec{u}\|.\|\overrightarrow{AC}\|$?

c) Mostre que $\overline{DP} = \dfrac{49\sqrt{65}}{65}$.

SUGESTÃO: Determine $\cos B\hat{D}C$ a partir do produto $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB}$.

FIM

O Professor

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 81 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada........................ 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E	R	R	A	D	A	S				
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	10	7	3	0	0	0	0	0	0	0	
C	2	20	17	13	10	7	3	0	0	0		
E	3	30	27	23	20	17	13	10	7			
R	4	40	37	33	30	27	23	20				
T	5	50	47	43	40	37	33					
A	6	60	57	53	50	47						
S	7	70	67	63	60							
	8	80	77	73								
	9	90	87									
	10	**100**										

2.ª Parte .... 119 pontos

1. .... 20 pontos
   - a) 8
   - b) 12

2. .... 55 pontos
   - a1) 10
   - a2) 5
   - a3) 8
   - b) 10
   - c) 10
   - d) 12

3. .... 18 pontos

4. .... 26 pontos
   - a) 8
   - b) 6
   - c) 12

Total **200 pontos**