Escola Secundária da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

11/12/98 **Turma A - Prova 2** **12.º Ano**

Nome: ____ *N.º:* ____ *Turma:* ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +10 pontos; cada resposta errada, -10/3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

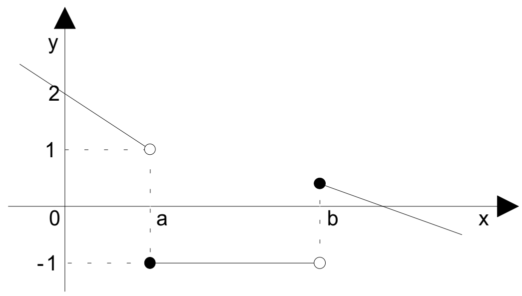
1. Seja $j(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \Leftarrow \quad x \le 2 \\ -x^2 + k & \Leftarrow \quad x > 2 \end{cases}$.

O valor de *k* para o qual é legítimo aplicar o teorema de Bolzano à função *j*, no intervalo $[-1, 3]$, é:

[E] 6. **[F]** 4. **[G]** 10. **[H]** -6.

2. Seja *f* a função de domínio *IR* cujo gráfico se apresenta:

Então conclui-se que:



[E] $\lim\limits_{x \to b^+} \dfrac{f(x) - f(b)}{x - b} > 0$.

[F] Para todo o $x \in]b, +\infty[$, *f'* é contínua.

[G] *f'* não se anula no intervalo $\left[0, \dfrac{a+b}{2}\right]$.

[H] O domínio de *f'* é *IR*.

3. Uma barra de ferro de 20 cm de comprimento e que está à temperatura de 0º C é sujeita a aquecimento, dilatando-se segundo a lei

$$D(t) = 20 + 0{,}0003t$$

sendo *D* o comprimento da barra (em cm) e *t* a temperatura (em º C). Então:

[E] A velocidade de crescimento da barra é maior à temperatura de 80º C do que à de 20º C.

[F] A aceleração de crescimento da barra é maior à temperatura de 80º C do que à de 20º C.

[G] A velocidade de crescimento da barra é inferior à temperatura de 80º C do que à de 20º C.

[H] O comprimento da barra atinge os 2,03 centímetros quando $t = 10^2$ º C.

4. Considere as sucessões de termo geral: $a_n = \dfrac{5n^2 - n}{2}$ e $b_n = \left(\dfrac{1}{n}\right)^2$.

Quanto ao limite da sucessão ($a_n + b_n$) pode concluir-se que:

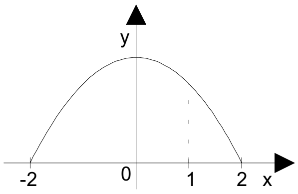
[E] é igual a $+\infty$. **[F]** não existe. **[G]** é igual a $-\dfrac{1}{2}$. **[H]** é igual a $\dfrac{5}{2}$.

5. Seja g uma função real de variável real, tal que:

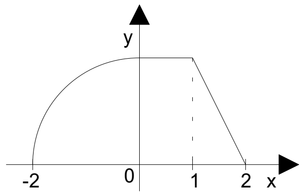
- g é contínua no intervalo $[-2,\ 2]$;
- $g'(0) = 0$;
- $g'(1)$ não existe;
- $g''(x) < 0$ para $-2 < x < 0$.

Qual dos seguintes gráficos pode ser um gráfico de g?

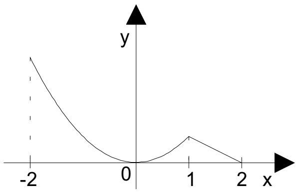
[E]



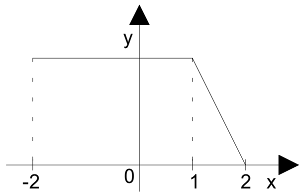
[F]



[G]



[H]



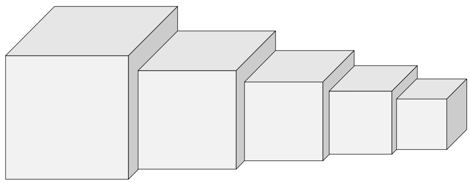
2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias

1. Observe a sequência de cubos considerada na figura ao lado, onde a aresta de cada cubo é 80% da do anterior.

A aresta do cubo maior é 2 cm.

Supondo que continuávamos indefinidamente a figura (para a direita), determine a soma dos volumes de todos os cubos da sequência.



2. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

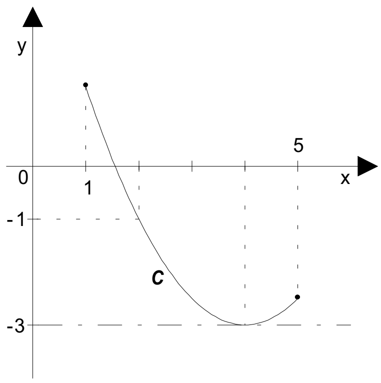
a) Mostre que $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{(1-x)^2} & \Leftarrow \quad x < 0 \\ \dfrac{1}{(1+x)^2} & \Leftarrow \quad x > 0 \end{cases}$

SUGESTÃO: Comece por definir f sem utilizar módulos.

b) Estude o sentido das concavidades e pontos de inflexão do gráfico de f.

c) Faça o estudo sobre as assimptotas do gráfico da função.

3. A curva ***C*** é a representação gráfica da função derivada, ***f'***, de uma função *f* derivável em [1, 5]. A tangente à curva no ponto de abcissa 4 é horizontal.



a) Diga, justificando, se é verdadeira ou falsa cada uma das afirmações:

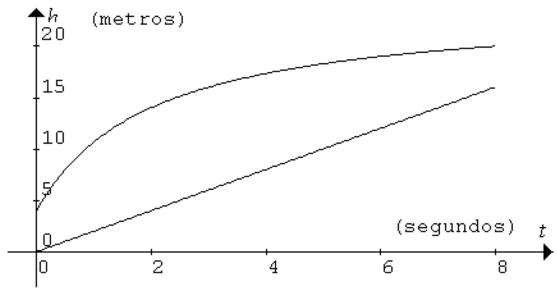
a1) *f* é contínua em [2, 4].

a2) $f(3) < f(4)$.

b) Supondo que $f(2) = 3$, escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 2.

c) Indique o sentido da concavidade de *f* no intervalo]3, 5[.
Justifique a resposta.

4. Durante um período de observação de 8 segundos foram registadas graficamente as alturas a que se encontravam do solo dois projécteis, ***P1*** e ***P2***, que se deslocavam perpendicularmente ao mesmo.



As respectivas alturas em relação ao solo (*em metros*) são dadas em função do tempo (*em segundos*) por:

$$h_1(t) = 4 + \frac{20t}{t+2} \qquad \text{e} \qquad h_2(t) = 2t\,.$$

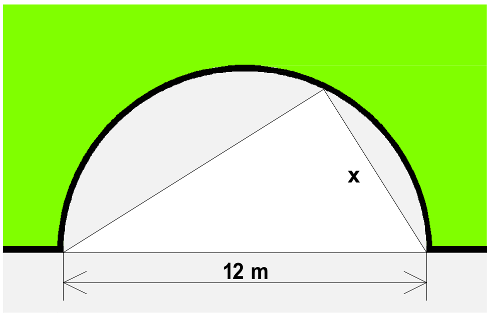
a) Calcule $\lim\limits_{t \to 2} \dfrac{h_1(t) - 14}{t - 2}$ e interprete o valor que encontrou.

b) Seja $d(t) = (h_1 - h_2)(t)$ a função da distância entre os projécteis ***P1*** e ***P2***.

b1) Mostre que $d'(t) = \dfrac{40 - 2(t+2)^2}{(t+2)^2}$.

b2) Estude a monotonia da função *d*, no intervalo de observação considerado.
Determine, com aproximação à centésima de segundo, os instantes em que a distância entre os projécteis foi máxima e mínima.

5. No pátio semicircular em frente ao Refeitório da Escola, pretende-se construir um canteiro com a forma triangular inscrito nesse semicírculo (observe a figura ao lado).



a) Mostre que a área do canteiro, em m^2, é dada por:

$$A(x) = \frac{x.\sqrt{144 - x^2}}{2}\,.$$

NOTA: Recorde que é rectângulo todo o triângulo inscrito numa semicircunferência.

b) Fazendo um estudo com derivadas, mostre que 36 m^2 é a área máxima possível de obter para o canteiro e que, então, ele terá a forma de um triângulo isósceles.

FIM

O Professor

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 50 pontos

Cada resposta certa .... +10 pontos

Cada resposta errada .... -10/3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		E	R	R	A	D	A	S
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
C	0	0	0	0	0	0	0
E	1	10	7	3	0	0	
R	2	20	17	13	10		
T	3	30	27	23			
A	4	40	37				
S	5	50					

2.ª Parte .... 150 pontos

1. .... 15 pontos

2. .... 41 pontos
   - a) 15
   - b) 13
   - c) 13

3. .... 32 pontos
   - a1) 8
   - a2) 8
   - b) 8
   - c) 8

4. .... 42 pontos
   - a) 15
   - b1) 12
   - b2) 15

5. .... 20 pontos
   - a) 8
   - b) 12

Total 200 pontos