

Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

07/05/99

Turma A - Provas 1 e 2

12.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

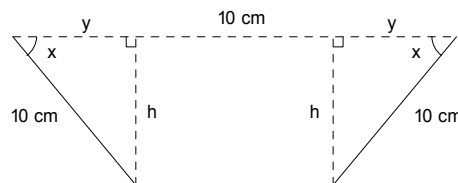
1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	A	B	D	B	B
Questão	4	1	2	3	5
Prova 2	G	H	F	H	G

2.ª Parte

1.

- a) Tendo em consideração os elementos da figura ao lado, temos $\cos x = \frac{y}{10}$ e $\sin x = \frac{h}{10}$, donde $y = 10 \cdot \cos x$ e $h = 10 \cdot \sin x$.



Tendo em conta a fórmula da área de um trapézio, vem

$$A(x) = \frac{(20 \cdot \cos x + 10) + 10}{2} \times 10 \cdot \sin x = (10 \cdot \cos x + 10) \times 10 \cdot \sin x = 100 \cdot \sin x \cdot (\cos x + 1)$$

, para $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$.

b)

$$\begin{aligned} A'\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2} + h\right) \cdot (\cos\left(\frac{\pi}{2} + h\right) + 1) - 100 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot (\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{100 \cdot \cos(h) \cdot (-\sin(h) + 1) - 100 \times 1 \times (0 + 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-100 \cdot \cos(h) \cdot \sin(h) + 100 \times (\cos(h) - 1)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-100 \cdot \cos(h) \cdot \sin(h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0^-} \left(\frac{100 \times (\cos(h) - 1)}{h} \times \frac{\cos(h) + 1}{\cos(h) + 1} \right) \\ &= -100 \lim_{h \rightarrow 0^-} \cos(h) \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(h)}{h} + 100 \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin^2(h)}{h \times (\cos(h) + 1)} \\ &= -100 \times 1 \times 1 + 100 \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{\sin(h)}{h} \times \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{-\sin(h)}{\cos(h) + 1} \\ &= -100 + 100 \times 1 \times \frac{0}{1 + 1} = -100 \end{aligned}$$

c1) $A'(x) = 100 \cdot \cos x \cdot (\cos x + 1) + 100 \cdot \sin x \cdot (-\sin x) = 100 \cdot \cos^2 x + 100 \cdot \cos x - 100 \cdot \sin^2 x = 100 \cdot \cos(2x) + 100 \cdot \cos x$.

c2)

$$A'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x$$

$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(x + \pi)$$

$$\Leftrightarrow 2x = \pm(x + \pi) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

No intervalo considerado, A' apenas tem um zero: $\frac{\pi}{3}$.

A variação de sinal de A' no intervalo considerado é obtida tendo em consideração:

A' é uma função contínua, pois é a soma de funções

contínuas e $A'(\frac{\pi}{4}) = 100 \times 0 + 100 \times \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$ e

$A'(\frac{\pi}{2}) = 100 \times (-1) + 0 < 0$ (A' não pode mudar de sinal enquanto não anular).

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
A'(x)		+	0	-	-100
A(x)		↗	$75\sqrt{3}$	↘	100

À medida que a amplitude do ângulo marcado vai aumentando a partir de 0°, a área da secção da caleira vai aumentando também (note que $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = 0^+$), obtendo-se a área máxima de $75\sqrt{3}$ cm² para um ângulo de 60°. Depois a área diminui com o aumento da amplitude do ângulo, obtendo-se um mínimo relativo (100 cm²) para um ângulo de 90°.

2.

a) Esses quatro pontos em relevo podem ser escolhidos entre 6 possíveis, sendo cada carácter então obtido pelo correspondente subconjunto de 4 elementos criado a partir do conjunto formado pelos 6 possíveis.

Podemos, portanto, obter $C_4^6 = \frac{6!}{4! \times 2!} = 3 \times 5 = 15$ caracteres diferentes com 4 pontos em relevo.

b) O número total de caracteres diferentes que podemos obter será a soma de todos os caracteres com 1 ponto, com 2 pontos, ... com 6 pontos.

Portanto, esse valor será $C_1^6 + C_2^6 + C_3^6 + C_4^6 + C_5^6 + C_6^6 = 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 63$. ($2^6 - 1$)

NOTA: $(1+1)^n = 2^n = C_0^n + C_1^n + C_2^n + \dots + C_{n-1}^n + C_n^n$.

3. Cálculo da probabilidade de *nunca sair o número 6*:

O número de casos possíveis é $NCP = 6^3 = 216$.

O número de casos favoráveis é $NCF = 5^3 = 125$.

Logo, $p(\text{nunca sair o número 6}) = \frac{125}{216} = 0,58$ (2 c.d.).

Cálculo da probabilidade de *saiem números todos diferentes*:

O número de casos possíveis é $NCP = 6^3 = 216$.

O número de casos favoráveis é $NCF = {}^6A_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$.

Logo, $p(\text{saiem números todos diferentes}) = \frac{120}{216} = 0,56$ (2 c.d.).

Portanto, é mais provável o primeiros dos acontecimentos, visto ser $0,58 > 0,56$.

NOTA: Para outros métodos, além do da Regra de Laplace, consulte a Prova Modelo de 1999.

4.

a) O centro da esfera será o ponto $M(1, 4, 0)$, ponto médio do segmento [AC].

O seu raio será $r = \overline{AM} = \sqrt{1^2 + (-4)^2 + 0^2} = \sqrt{17}$.

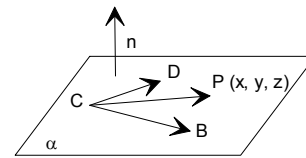
Sendo $D = C + \vec{CD} = (0, 8, 0) + (1, -7, 4) = (1, 1, 4)$, então $\overline{MD} = \sqrt{0^2 + 3^2 + (-4)^2} = 5 > r$. Logo, o ponto D é exterior à esfera considerada.

Uma condição que define essa esfera é $(x-1)^2 + (y-4)^2 + z^2 \leq 17$.

b) Designado por $\vec{n}_\alpha = (a, b, c)$ um vector genérico normal ao plano BCD (α), será:

$$\begin{cases} (a, b, c) \cdot (5, -3, 0) = 0 \\ (a, b, c) \cdot (1, -7, 4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 3b = 0 \\ a - 7b + 4c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5}b \\ 32b - 20c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{5}b \\ c = \frac{32}{20}b \end{cases}$$

Assim, $\vec{n} = (3, 5, 8)$ (por exemplo, para $b = 5$) é um vector normal ao plano BCD .



Designado $P(x, y, z)$ um ponto genérico do plano, os vectores \vec{CP} e \vec{n} são perpendiculares, logo:

$$(x - 0, y - 8, z - 0) \cdot (3, 5, 8) = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y - 40 + 8z = 0 \Leftrightarrow 3x + 5y + 8z = 40.$$

Portanto, $3x + 5y + 8z = 40$ é uma equação cartesiana do plano BCD .

c) Sendo o plano yOz definido pela condição $x = 0$, então $\begin{cases} 3x + 5y + 8z = 40 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 5 - \frac{5}{8}y \\ x = 0 \end{cases}$ define de forma

cartesiana a recta pretendida.

Portanto, além do ponto $C(0, 8, 0)$, é também ponto desse plano o ponto $T(0, 0, 5)$ (p.e., para $y = 0$).

Assim, $(x, y, z) = (0, 8, 0) + k(0, 8, -5)$, $k \in \mathbb{R}$ é uma equação vectorial da recta pedida.

d) Sendo $\vec{B} = \vec{C} + \vec{CB} = (0, 8, 0) + (5, -3, 0) = (5, 5, 0)$, então $\vec{BA} = (-3, -5, 0)$.

Como $\vec{BA} \cdot \vec{BC} = (-3, -5, 0) \cdot (-5, 3, 0) = 15 - 15 + 0 = 0$, então $\hat{A}BC = 90^\circ$. Logo o triângulo $[ABC]$ é rectângulo.

O volume da pirâmide $[ABCD]$ é $V = \frac{1}{3} \times \frac{|\vec{AB} \times \vec{BC}|}{2} \times |\vec{DD}'| = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{34} \times \sqrt{34}}{2} \times 4 \approx 22,7$ unidades de volume.

NOTA: D' é a projecção ortogonal do ponto D sobre o plano coordenado xOy .

5. Determinação de assíptotas verticais:

A função é contínua no seu domínio, pois é definida, quer em \mathbb{R}^- quer em \mathbb{R}^+ , pela soma e quociente de funções contínuas, não se anulando a função denominador no domínio de h . Portanto, existe apenas um ponto, $x = 0$, onde poderá haver assíptota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1 - 2x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - \frac{\sin x}{x}) = 0 - 1 = -1$$

Portanto, a recta de equação $x = 0$ é uma assíptota vertical unilateral do gráfico de h .

Determinação de assíptotas não verticais:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{x^2} = 0$$

$$b_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - 0 \cdot x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 2x}{x} = -2$$

Portanto, a recta de equação $y = -2$ é uma assíptota horizontal do gráfico de h em torno de $-\infty$.

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{h(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \frac{\sin x}{x^2}) = 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x^2} = 2 - 0 = 2$$

$$b_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} (h(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\frac{\sin x}{x}) = 0$$

Portanto, a recta de equação $y = 2x$ é uma assíptota oblíqua do gráfico de h em torno de $+\infty$.

-
- (1) Como $a = 4$ e $c = 6$, então $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20}$.
- (2) Uma possibilidade consistirá em recordar que o gráfico da função $y = \frac{ax + b}{a'x + b'}$ é uma hipérbole com uma assíntota vertical de equação $x = -\frac{b'}{a'}$, no caso de equação $x = 2$.
- (3) Sem se preocupar com qualquer cálculo, esquematize geometricamente cada uma das situações descritas. Simples! Não?!
- (4) O perímetro do círculo será $P = 3 \times (8\pi) = 24\pi$. Logo, o seu raio será $r = \frac{24\pi}{2\pi} = 12$.
- (5) A afirmação " $s'(3) < t'(3)$ " é falsa, pois $s'(3) > 0$ e $t'(3) < 0$ (Porquê?).
A afirmação " $\frac{s}{t}$ é um zero da função $\frac{s}{t}$ " é falsa, pois esta função não está definida em $x = 5$.
A afirmação " $(s \circ t)(5) + t''(3) < 0$ " é falsa, pois $(s \circ t)(5) = s(t(5)) = s(0) = 2$ e $t''(3) > 0$ (Porquê?).
A afirmação " $(t \circ s)(0) > t(3)$ " é verdadeira, pois $(t \circ s)(0) = t(s(0)) = t(2) > t(3)$.