Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

05/03/99 **Turma A - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	1	2(1)	3	4(2)	5	6	7(3)	8(4)	9(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
Prova 1	**C**	**C**	**D**	**C**	**D**	**B**	**D**	**B**	**A**
Questão	*5*	*6*	*8*	*1*	*3*	*9*	*2*	*4*	*7*
Prova 2	**H**	**F**	**E**	**E**	**G**	**G**	**G**	**E**	**H**

2.ª Parte

1.

a) O número de comissões é o número de maneiras de reunir 3 rapazes, escolhidos entre 10, com 3 raparigas, escolhidas entre 14.

O número total de comissões é, portanto, $C_3^{10} \times C_3^{14} = 120 \times 364 = 43.680$.

b) *1.º Processo*: O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras dos sete membros da comissão se disporem em fila uns ao lado dos outros. Assim, $p = \frac{5 \times 4! \times 3!}{7!} = \frac{5 \times 24 \times 6}{5040} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$.

2.*º Processo*: O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras dos rapazes ocuparem três dos sete lugares da fila. Assim, $p = \frac{5 \times 3!}{A_3^7} = \frac{5 \times 6}{7 \times 6 \times 5} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$.

3.*º Processo*: O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de escolher três de sete lugares (os lugares onde ficam os rapazes). Assim, $p = \frac{5}{C_3^7} = \frac{5}{35} = \frac{1}{7} \approx 0{,}143$.

2.

a1) Escolhido um ponto C nas condições do enunciado, podemos constatar que são semelhantes os triângulos $[OCD]$ e $[ECB]$, sendo $B\ (1,\ 0)$. Assim, $\frac{\overline{OD}}{\overline{EB}} = \frac{\overline{OC}}{\overline{EC}} \Leftrightarrow \frac{y}{2} = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow y = \frac{2x}{x-1}$.

a2) Tendo em consideração a alínea anterior, será: $A(x) = \frac{\overline{OC} \times \overline{OD}}{2} = \frac{x \times \frac{2x}{x-1}}{2} = \frac{x^2}{x-1}$.

a3) $A'(x) = \left(\frac{x^2}{x-1}\right)' = \frac{2x \times (x-1) - 1 \times x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x.(x-2)}{(x-1)^2}$.

b) A é decrescente em $]1, 2]$ e crescente em $[2, +\infty[$.
(Note que $(x-1)^2 > 0,\ \forall x \in IR \setminus \{1\}$ e tenha em consideração o sinal da função quadrática $x \to x^2 - 2x$ (negativa entre os zeros))

x	1		2	$+\infty$
$A'(x) = \frac{x.(x-2)}{(x-1)^2}$		-	0	+
$A(x)$		↘	4	↗

c) Como podemos verificar na alínea anterior, a área mínima do triângulo considerado é 4, para $x = 2$.
Logo, o perímetro desse triângulo é $P = \overline{OC} + \overline{OD} + \overline{CD} = 2 + \frac{2 \times 2}{2-1} + \sqrt{2^2 + 4^2} = 2 + 4 + \sqrt{20} = 6 + 2\sqrt{5} \approx 10{,}47$.

d) A função é contínua no seu domínio ($]1,+\infty[$), contudo existe possibilidade de assimptota vertical em $x=1$.

Determinação da assimptota vertical:

$$\lim_{x\to 1^+} A(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty\ ;$$

Logo, a recta de equação $x=1$ é uma assimptota vertical do gráfico da função.

Determinação da assimptota oblíqua:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{A(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1\ ;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (A(x) - 1\times x) = \lim_{x\to\infty} (\frac{x^2}{x-1} - x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^2 + x}{x-1} = 1\ .$$

Logo, $y = x+1$ é equação de uma assimptota oblíqua do gráfico da função.

3. A equação da parábola é do tipo $y = ax^2 + k$, pois o eixo *Oy* é seu eixo de simetria. Como os pontos *V* (0, 50) e *T* (100, 0) são dois pontos dessa parábola, temos: $\begin{cases} y(0)=50 \\ y(100)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=50 \\ 100^2 a + 50 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=50 \\ a=-\frac{1}{200} \end{cases}$.

Logo, $y = -\frac{1}{200}x^2 + 50$ é uma equação da parábola que contém esse arco.

Ora, $y = -\frac{1}{200}x^2 + 50 \Leftrightarrow 200y = -x^2 + 200\times 50 \Leftrightarrow x^2 = -200.(y-50)$. Portanto, sendo o parâmetro da parábola $p = 100$ e o vértice o ponto *V* (0, 50), o foco é *O* (0,0) e a directriz a recta de equação $y = 100$.

4.

a) Como as medidas dos eixos maior e menor são, respectivamente, $2a = \overline{AB} = 7$ e $2b = \overline{AD} = 4$, e o centro da elipse é *Q* (5,5; 4), então uma sua equação é $\frac{(x-5{,}5)^2}{3{,}5^2} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$.

b) Os vectores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{AC}$ são colineares, com sentidos opostos.

c) Como $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DB} = ||\overrightarrow{DC}||.||\overrightarrow{DB}||.\cos B\hat{D}C$, $\overrightarrow{DC} = (7,0)$ e $\overrightarrow{DB} = (7,-4)$ então:

$$\cos B\hat{D}C = \frac{(7,0).(7,-4)}{7\times\sqrt{49+16}} \Leftrightarrow \cos B\hat{D}C = \frac{49+0}{7\times\sqrt{65}} \Leftrightarrow \cos B\hat{D}C = \frac{7}{\sqrt{65}}\ .$$

Atendendo ao triângulo rectângulo [CDP], temos $\cos B\hat{D}C = \frac{\overline{DP}}{\overline{DC}}$, donde $\overline{DP} = \cos B\hat{D}C \times \overline{DC}$.

Logo, $\overline{DP} = \frac{7}{\sqrt{65}} \times 7 = \frac{49\sqrt{65}}{65}$, c.q.m..

---

(1) Basta repara que as áreas restantes no nível *n* são: $A_0 = 1$, $A_1 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ e $A_2 = \frac{3}{4} - \frac{3}{16} = \frac{9}{16}$.
Ou, se preferir, a partir no Nível 0 a área restante é três quartos da área restante do nível anterior.

(2) Começando, por exemplo, a criar o código pela casa das unidades de milhar, há dez possibilidades para ocupar essa casa e nove para cada uma das restantes. Logo, o número de códigos válidos é $N = 10\times 9\times 9\times 9 = 7290$.

(3) Como [BC] é a diagonal de um quadrado de lado *x*, será $\overline{BC} = x\sqrt{2}$. Logo, $\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{BE} = x\sqrt{2}\times x\times\cos 45^{o} = x^2\times\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2} = x^2$.

(4) Como $y^2 - 8x^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{y^2}{8} - x^2 = 1$, a hipérbole tem focos no eixo Oy, a origem como centro de simetria, sendo $a=1$ e $b=\sqrt{8}$, logo $c = \sqrt{8+1} = 3$. Portanto, os vértices são V (0, $\sqrt{8}$) e V' (0, $-\sqrt{8}$); os focos são F (0, 3) e F' (0, -3); as assimptotas têm equações $y = \sqrt{8}.x$ e $y = -\sqrt{8}.x$.

(5) O vector $\vec{t} = (-1,1,1)$ é o único que é perpendicular quer a $\vec{u}$, quer a $\vec{v}$. (Note que $\vec{t}.\vec{u} = 0 \wedge \vec{t}.\vec{v} = 0$).