Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

05/02/99 **Turma A - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ____________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**C**	**C**	**A**	**A**	**B**
Questão	*5*	*4*	*2*	*1*	*3*
Prova 2	**E**	**F**	**H**	**F**	**G**

2.ª Parte

1.

a) O declive dessa recta é $m = f'(1) = \frac{1-\sqrt{1}}{1} = 0$, portanto essa recta é horizontal. Uma sua equação é $y = -2$, pois essa recta contém o ponto de tangência A (1, -2).

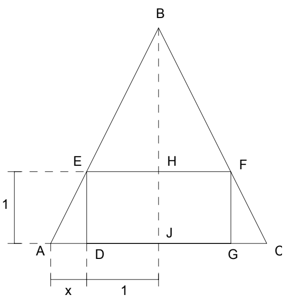
Como toda a função com derivada finita num ponto é contínua nesse ponto, podemos concluir que *f* é contínua em $x = 1$, pois $f'(1) = 0$.

b) O gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo em $]0, 4[$ e concavidade voltada para ima em $]4, +\infty[$.
O ponto de abcissa 4 é um ponto de inflexão.

x	0		4	$+\infty$
$f''(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2x^2}$		-	0	+
$f(x)$		$\cap$	PI	$\cup$

2.

a) Tendo em consideração a sugestão, é $\frac{\overline{BH}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{AD}}$, donde $\frac{\overline{BH}}{1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \overline{BH} = \frac{1}{x}$.



Assim, $A_{[ABC]} = A_{[DEFG]} + 2 \times A_{[ADE]} + A_{[BEF]} = 2 \times 1 + 2 \times \frac{x \times 1}{2} + \frac{2 \times \frac{1}{x}}{2} = 2 + x + \frac{1}{x}$.

Logo, $a(x) = 2 + x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$), como se pretendia.

b) $a'(x) = (2 + x + \frac{1}{x})' = 0 + 1 + \frac{0 - 1 \times 1}{x^2} = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$.

c) A área do triângulo [ABC] é mínima para $x = 1$.
(Note que $x^2 > 0, \ \forall x \in IR^+$ e tenha em consideração o sinal da função quadrática $x \to x^2 - 1$ (negativa entre os zeros))

x	0		1	$+\infty$
$a'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$		-	0	+
$a(x)$		$\searrow$	4	$\nearrow$

d) A função é contínua no seu domínio (IR^+), contudo existe possibilidade de assimptota vertical em $x = 0$.

Determinação da assimptota vertical:

$$\lim_{x \to 0^+} a(x) = \lim_{x \to 0^+} (2 + x + \frac{1}{x}) = 2 + 0 + \frac{1}{0^+} = +\infty ;$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é uma assimptota vertical do gráfico da função.

Determinação da assimptota oblíqua:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + 1 + 0 = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (a(x) - 1\times x) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + x + \frac{1}{x} - x\right) = 2 + 0 = 2 .$$

Logo, $y = x + 2$ é equação de uma assimptota oblíqua do gráfico da função.

3. Como os dois acontecimentos são incompatíveis, então $p(X \cap Y) = 0$.
Assim, $p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y) = p(X) + p(Y)$ .Logo:

$$\begin{cases} p(X) + p(Y) = \frac{1}{2} \\ p(X) = 4P(Y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5p(Y) = \frac{1}{2} \\ p(X) = 4P(Y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5p(Y) = \frac{1}{10} \\ p(X) = \frac{4}{10} \end{cases}$$ e, portanto, $p(X) = \frac{2}{5}$.

4. O número de casos possíveis é o mesmo para ambos os jogadores (${}^6A'_3 = 6^3 = 216$).
Vejamos o que se passa com os respectivos casos favoráveis.

SOMA 7	
Parcelas	*Número de sequências diferentes*
1, 1, 5	3
1, 2, 4	6
1, 3, 3	3
2, 2, 3	3
TOTAL	**15**

SOMA 10	
Parcelas	*Número de sequências diferentes*
1, 3, 6	6
1, 4, 5	6
2, 2, 6	3
2, 3, 5	6
2, 4, 4	3
3, 3, 4	3
TOTAL	**27**

O João tem maior probabilidade de ganhar, pois o número de casos favoráveis é superior para a soma 10.

5. *Para 3 acertos*:
Das 12 cruzes, três delas assinalam 3 números certos (**C**) - pertencentes à *chave* - e as restantes nove assinalam 9 números errados (**E**) - não pertencentes à *chave*.

C C C E E E E E E E E E

Como a aposta simples é composta por 6 cruzes (seis números), convertendo a apostas simples conclui-se que as apostas premiadas, além das cruzes certas, serão completadas com mais 3 cruzes erradas.

Assim, o número de apostas (simples) premiadas com o **5.º prémio** (3 números certos) será $N_1 = C_3^9 = 84$.

Para 4 acertos:
Raciocinando da mesma maneira, temos agora a situação: **C C C C E E E E E E E E**
Para o **4.º prémio** será: $N_2 = C_2^8 = 28$.

Para o **5.º prémio** será: $N_3 = C_3^4 \times C_3^8 = 4 \times 56 = 224$.(Note que para este prémio apenas há 3 números certos, ficando, portanto, um deles de fora)

6.

a) O algarismo *zero* pode ocupar 4 posições diferentes: *unidades*, *dezenas*, *centenas* ou *unidades de milhar*.
Em cada um destes 4 casos, as restantes 3 posições serão preenchidos com algarismos escolhidos entre 9 (todos excepto o *zero*), podendo haver repetição do algarismo escolhido e interessando a posição (ordem) em que figuram.
Portanto, o número de códigos existentes com um e um só algarismo zero é $N = C_1^4 \times {}^9A'_3 = 4 \times 9^3 = 2916$.

b) O número de casos possíveis é $NCP={}^{10}A'_4 = 10^4$, pois, como já vimos, interessa a ordem e pode haver repetição de algarismos. O número de casos favoráveis é $NCF={}^{10}A_4 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$, pois agora não pode haver repetição de algarismos e continua a interessar a ordem.
Portanto, a probabilidade pedida é $p = \frac{5040}{10000} = 0{,}504$.

7. ① ① ① ② ② ③

a) Como há 4 casos favoráveis entre 6 possíveis, a probabilidade pedida é $p=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

b) Por aplicação da Lei de Laplace, temos: $p(1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $p(2)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ e $p(3)=\frac{1}{6}$.
Como estamos face a uma situação de provas repetidas, a probabilidade pedida é:
$p(k=3)=C_3^5\times(\frac{1}{3})^3\times(\frac{2}{3})^2=10\times\frac{1}{27}\times\frac{4}{9}=\frac{40}{243}$.

8. **A**: sair ▣ na 1.ª extracção
B: sair ▣ na 2.ª extracção
C: sair ⊡ na 3.ª extracção
D: sair · na 4.ª extracção

a) Como há reposição, os acontecimentos são independentes. Assim, sendo $p(A)=p(B)=p(C)=p(D)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$

é $P(A\cap B\cap C\cap D)=p(A)\times p(B)\times p(C)\times p(D)=(\frac{1}{4})^4=\frac{1}{256}\approx 0{,}0039$.

b) Não havendo reposição, os acontecimentos são dependentes.
Assim, sendo $p(A)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}$, $p(B/A)=\frac{13}{51}$, $p(C/(A\cap B))=\frac{13}{50}$ e $p(D/(A\cap B\cap C))=\frac{13}{49}$, a probabilidade pedida é $p=\frac{13^4}{52\times51\times50\times49}=\frac{2197}{499800}\approx 0{,}0044$.

---

(1) Num referencial cartesiano, anote as informações prestadas sobre a função e conclua sobre a veracidade de cada uma das afirmações. Caso não consiga concluir, considere o texto seguinte.
Como $h(-2)=3$, então é falsa a afirmação " O contradomínio de *h* é $]-\infty,3[$ ".
Como a recta de equação $y=-4$ é assimptota do gráfico de *h* e $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-4$. Logo, é falsa a afirmação " $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-\infty$.".
Como a função é contínua em *IR*, $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=-\infty$ e *h* é estritamente crescente no intervalo $]-\infty,-2]$, então a função admite um e um só zero neste intervalo; sendo estritamente decrescente no intervalo $[-2,+\infty[$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-4$, então admite também um e um só zero neste intervalo. Logo é falsa a afirmação " A função tem três zeros.".
Como $h(-2)=3$, *h* é estritamente decrescente no intervalo $[-2,+\infty[$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=-4$, então $-4<h(0)<3$. Logo, é verdadeira a afirmação " $h(0)>-4$.".

(2) Considerando a propriedade "No triângulo de Pascal, cada termo de uma linha (excepto os dos extremos) é igual à soma dos dois que estão acima", isto é $C_p^n+C_{p+1}^n=C_{p+1}^{n+1}$, temos: $84+a=210$, donde $a=126$ e, sendo $a+126=b$, $b=252$.

(3) Basta considerar, por exemplo, que sendo $f''(x)>0$ no intervalo $]\infty,-1[$ o gráfico de *f* terá a concavidade voltada para cima nesse mesmo intervalo. Esta consideração elimina imediatamente três dos gráficos.

(4) Existem $P_3=3!=6$ maneiras distintas de colocar os livros agrupados por disciplina. Depois podemos permutar os livros dentro de cada grupo: $P_3=3!$ maneiras para Inglês, $P_4=4!$ para História e $P_2=2!$ para Filosofia. Logo, o número de maneiras de dispor os livros de modo que os da mesma disciplina estejam juntos é $3!\times3!\times4!\times2!$.

(5) O número de *pizzas* a considerar é a soma do número das que se podem preparar com 5 ingredientes, com o número das que se podem preparar com 6 ingredientes, com ... o número das que se podem preparar com 8 ingredientes. Como os ingredientes a utilizar são escolhidos, sem interessar a repetição e a ordem, entre 8 ingredientes possíveis, o número de *pizzas* diferentes que se podem preparar é ${}^8C_5+{}^8C_6+{}^8C_7+{}^8C_8$.

O Professor