

Escola Secundária da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

10/11/98

Turma A - Provas 1 e 2

12.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

	1 ⁽¹⁾	2 ⁽²⁾	3 ⁽³⁾	4 ⁽⁴⁾	5 ⁽⁵⁾
Questão	1	2-a)	2-b)	3	4
Prova 1	B	B	A	D	C
Questão	3	1-a)	1-b)	4	2
Prova 2	A	C	D	A	B

2.ª Parte

1.

- a) Os comprimentos dos onze segmentos estão em progressão geométrica de razão $\frac{3}{4}$.

$$\text{Assim, } S_{1-11} = 6 \times \frac{1 - (\frac{3}{4})^{11}}{1 - \frac{3}{4}} = 6 \times 4 \times (1 - (\frac{3}{4})^{11}) = 24 \times (1 - (\frac{3}{4})^{11}) \approx 23,0.$$

A espiral desenhada mede aproximadamente 23,0 centímetros.

- b) Em centímetros, o comprimento total da espiral, nas condições propostas, será dada por:

$$\lim S_n = \lim (6 \times \frac{1 - (\frac{3}{4})^n}{1 - \frac{3}{4}}) = 24 \times \lim (1 - (\frac{3}{4})^n) = 24 \times (1 - 0) = 24.$$

Se continuássemos o desenho indefinidamente, o comprimento total da espiral seria 24 centímetros.

2.

a) $\lim_{r \rightarrow +\infty} P(r) = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{100.r}{(r+2)^2} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{100.r}{r^2 + 4r + 4} = \lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{100}{r + 4 + \frac{4}{r}} = \frac{100}{+\infty} = 0$

A potência dissipada na resistência variável será praticamente nula quando o valor da resistência for extremamente elevado.

b1)

r (Ω)	0	0,5	1	2	3	6	12	100
P (W) (2 c.d.)	0	8,00	11,11	12,50	12,00	9,38	6,12	0,96

- b2) *Por exemplo:* No intervalo $[3, 6]$ a função é contínua, logo, de acordo com o teorema de Bolzano, assume todos os valores compreendidos entre $P(6)$ e $P(3)$, em particular $\exists r \in]3, 6[: P(r) = 10$.

$$\text{Como } \begin{cases} P(4) \approx 11,11 \\ P(5) \approx 10,20 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(5,5) \approx 9,78 \\ P(5,2) \approx 10,03 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} P(5,3) \approx 9,95 \\ P(5,2) \approx 10,03 \end{cases},$$

então uma aproximação desse valor com erro inferior a 0,1 Ω é $r = 5,2 \Omega$ (por exemplo).

c) *Determinação das assíntotas verticais:*

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} q(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{100x}{(x+2)^2} = \frac{-200}{0^+} = -\infty.$$

Logo, $x = -2$ é equação de uma assíntota vertical bilateral.

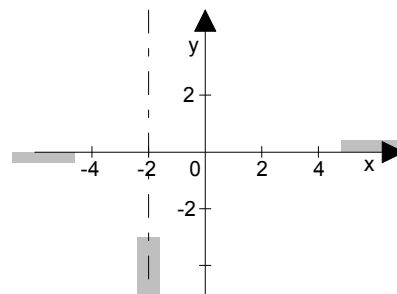
Determinação das assíntotas não verticais:

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{q(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{100}{(x+2)^2} = 0;$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (q(x) - 0 \times x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{100x}{(x+2)^2} = 0^\pm. \text{ (ver alínea a)}$$

Logo, $y = 0$ é equação de uma assíntota horizontal bilateral.

Na figura ao lado apresenta-se o comportamento da função junto das assíntotas (o gráfico aproxima-se da assíntota na região cinzenta).



3.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x^2-4} \right)^{(\infty-\infty)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+2-1}{x^2-4} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{x+1}{x^2-4} \right) = \frac{3}{0^+} = +\infty.$

b) Ora, $\lim_{x \rightarrow -5^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -5^-} \left(5 + \frac{1}{x} - x \right) = 5 - \frac{1}{5} + 5 = \frac{49}{5};$

$$\lim_{x \rightarrow -5^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} (x^2 - a) = 25 - a;$$

$$h(-5) = (-5)^2 - a = 25 - a.$$

Para que h seja contínua em $x = -5$ terá de ser $\lim_{x \rightarrow -5^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow -5^+} h(x) = h(-5)$, logo $25 - a = \frac{49}{5} \Leftrightarrow a = \frac{174}{5}.$

c) A recta de equação $y = -x + 5$ é assíntota oblíqua de h em torno de $-\infty$ se e só se $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - y) = 0.$

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} (h(x) - y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(5 + \frac{1}{x} - x - (-x + 5) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x} \right) = 0$, então a recta de equação $y = -x + 5$ é assíntota oblíqua de h em torno de $-\infty$.

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{n} - \sqrt{n+1})(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - n - 1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}} \right)^n = \frac{1}{+\infty} + \infty = 0 + \infty = +\infty$

Note que $\frac{\pi}{\sqrt{2}} > 1.$

FIM

(1) $S_{1-60} = 5610 \Leftrightarrow \frac{a_1 + (a_1 + 59 \times 3)}{2} \times 60 = 5610 \Leftrightarrow 60a_1 = 5610 - 5310 \Leftrightarrow a_1 = 5.$ Assim, $a_n = 5 + 3 \cdot (n - 1) = 3n + 2.$

(2) Como $u_n = \frac{1}{n} - 2 \rightarrow -2^+$, então $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(u_n) = 4.$

(3) « g é contínua à direita do ponto $x = -2$ » é uma afirmação verdadeira, pois $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = g(-2) = 4.$

« $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - (x - 2)] = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 4$ » é uma afirmação falsa, pois $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty.$

« g é contínua no intervalo $] -2, 0[$ » é uma afirmação verdadeira.

« $\lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x) - (x - 2)] = 0^+$ e $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ » é uma afirmação verdadeira ($\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$).

«A função g satisfaz as condições de aplicabilidade do teorema de Bolzano no intervalo $[-4, -2]$ » é uma afirmação falsa, pois a função não é contínua no intervalo fechado considerado (note que não é contínua à esquerda de -2).

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 3n^2}{1 - 3n} - n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 3n^2 - n + 3n^2}{1 - 3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{1 - 3n} \right) = -\frac{1}{3}.$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 3n^2}{1 + 3n} + n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n - 3n^2 + n + 3n^2}{1 + 3n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{1 + 3n} \right) = 1.$$

(5) A primeira condição elimina um dos gráficos. A segunda condição elimina outro dos gráficos. A terceira condição elimina outro dos dois restantes.

O Professor