Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

28/05/2004 **Turmas A e B - Prova 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 7 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

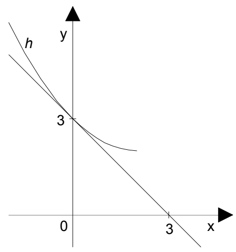
1. Para um determinado número natural *n*, o desenvolvimento de $(x+2y)^n$ é:

$$x^6 + 12x^5y + \_\_\_\_\_\_\_ + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6$$

O termo em falta é:

[A] $140x^4y^2$ **[B]** $60x^4y^2$ **[C]** $20x^4y^2$ **[D]** $15x^4y^2$

2. Na figura está representada parte do gráfico de uma função *h*, de domínio *IR*, bem como parte da recta tangente ao gráfico de *h*, no ponto $(0, 3)$.
Esta recta intersecta o eixo *Ox* no ponto de abcissa 3.



Qual das expressões seguintes pode definir *h'*, função derivada de *h* ?

[A] $2-\frac{x}{3}$ **[B]** $\frac{x}{2}-1$

[C] $\frac{x}{3}-2$ **[D]** $1-\frac{x}{2}$

3. Seja A um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de 1.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $p(A \mid A)$?

[A] $[p(A)]^2$ **[B]** 0 **[C]** $p(A)$ **[D]** 1

4. De uma função *h*, contínua em *IR*, sabe-se que:

- $h(-2)=3$
- $\lim_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$
- a recta de equação $y=-4$ é assimptota do gráfico de *h*
- *h* é estritamente crescente no intervalo $]-\infty,-2]$ e estritamente decrescente no intervalo $[-2,+\infty[$

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

[A] $h(0) < -4$ **[B]** O contradomínio de *h* é $]-\infty, 3]$

[C] A função *h* tem dois zeros **[D]** $\lim_{x\to+\infty} h(x) = -4$

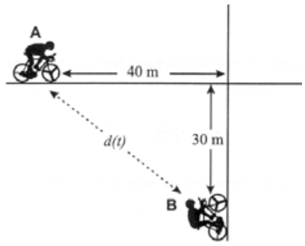
5. Considere uma função *f*, de domínio *IR*, definida por $f(x) = e^{x-a}$, onde *a* designa um certo número real.
O gráfico de *f* intersecta o eixo *Oy* no ponto de ordenada 2.

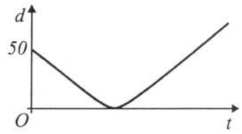
Indique o valor de *a*.

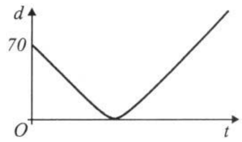
[A] e^2 **[B]** $1 - \ln 2$ **[C]** $\ln \frac{1}{2}$ **[D]** -2

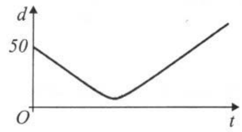
6. Na figura estão representados dois ciclistas, A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegarem ao cruzamento, ambos continuam em frente.
No instante $t = 0$, os ciclistas A e B encontram-se, respectivamente, a 40 metros e a 30 metros do cruzamento.
Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante.

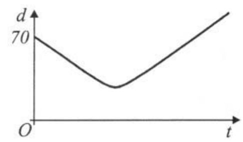
Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de *t*, dá a distância $d(t)$ entre os dois ciclistas, no instante *t* ?



[A]


[B]


[C]


[D]


7. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = tg\,(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n})$?

[A] $+\infty$ **[B]** $-\infty$ **[C]** Não existe **[D]** 0

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. Seja *C* o conjunto dos números complexos e *i* a unidade imaginária.

   a) Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas do número complexo $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$, simplificando o mais possível as expressões obtidas.

   b) Seja *z* um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à recta definida pela condição $\text{Re}(z) = -2$.
   Seja B a imagem geométrica de $i.z$.
   Seja O a origem do referencial.
   Represente, no plano complexo, um triângulo [AOB], de acordo com as condições enunciadas.
   Sabendo que a área do triângulo [AOB] é 8, **determine** *z*, na forma algébrica.

2. Considere a função *f*, de domínio IR^+, definida por $f(x) = 3x - 2\ln x$ (*ln* designa logaritmo de base *e*).

   a) Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

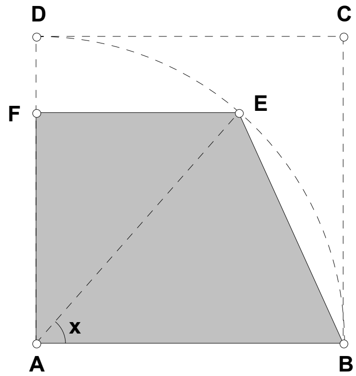
   a1) Estude *f* quanto à existência de assimptotas do seu gráfico.

   a2) Mostre que a função *f* tem um único mínimo e que o seu gráfico não possui pontos de inflexão.

   b) O gráfico de *f* contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa.
   Recorrendo à sua calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas).
   Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

3. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEF]. Tem-se que:

- [ABCD] é um quadrado de lado 2
- BD é um arco de circunferência de centro em A;
  o ponto E move-se ao longo deste arco;
  em consequência, o ponto F desloca-se sobre o segmento [AD], de tal forma que se tem sempre [EF] $\perp$ [AD]
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAE ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)



A área do polígono [ABEF] é dada, em função de x, por

$$A(x) = 2\,sen\ x + sen\ (2x)$$

a) Calcule $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.

b) Sem recorrer à calculadora gráfica, estude a função A quanto à monotonia e determine o valor de x para o qual a área do polígono [ABEF] é máxima.

4.

a) Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).
Sabendo que A e B são acontecimentos independentes, prove que

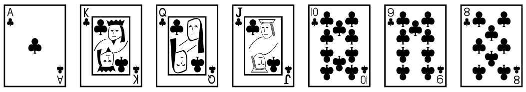
$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \times p(\overline{A})$$

b) Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus. Cada naipe tem três figuras: Rei, Dama e Valete.

b1) Retira-se, ao acaso, uma carta de um baralho completo.
Utilizando a igualdade referida na alínea anterior, determine a probabilidade de a carta extraída ser uma figura ou uma espada. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: Deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

b2) Seleccionaram-se sete cartas do naipe de paus:



Dispõem-se as sete cartas, em fila, em cima de uma mesa.
Explicando o seu raciocínio, determine quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama.

5. A Sofia preparou um pudim, para servir como sobremesa ao jantar.
Depois de o ter confeccionado, a Sofia colocou o pudim a arrefecer, na bancada da cozinha.
Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.

Admita que a temperatura do pudim, em graus centígrados, t minutos depois de ter sido colocado na bancada, é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0,05t} & \Leftarrow \quad 0 \le t < 60 \\ 6 + 24 \times 2^{-0,05(t-60)} & \Leftarrow \quad t \ge 60 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas questões seguintes:

- Atendendo a que a função é contínua, utilize o Teorema de Bolzano-Cauchy para mostrar que, antes de o pudim ter sido colocado no frigorífico, houve um instante em que a sua temperatura foi de 35º C.
- Quanto tempo deverá o pudim estar no frigorífico, para que a sua temperatura fique igual a doze graus centígrados? Apresente o resultado em minutos.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 63 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS							
		0	1	2	3	4	5	6	7
C	0	0	0	0	0	0	0	0	0
E	1	9	6	3	0	0	0	0	
R	2	18	15	12	9	6	3		
T	3	27	24	21	18	15			
A	4	36	33	30	27				
S	5	45	42	39					
	6	54	51						
	7	63							

2.ª Parte .... 137 pontos

1. .... 30 pontos
   - a) 14
   - b) 16

2. .... 38 pontos
   - a1) 13
   - a2) 15
   - b) 10

3. .... 25 pontos
   - a) 10
   - b) 15

4. .... 32 pontos
   - a) 10
   - b1) 10
   - b2) 12

5. .... 12 pontos

Total **200 pontos**