

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 7 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. De uma função h , contínua em \mathbb{R} , sabe-se que:

- $h(-2) = 3$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$
- a recta de equação $y = -4$ é assíntota do gráfico de h
- h é estritamente crescente no intervalo $]-\infty, -2]$ e estritamente decrescente no intervalo $[-2, +\infty[$

Qual das afirmações seguintes é **falsa**?

- | | |
|---------------------------------|--|
| [A] A função h tem dois zeros | [B] $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -4$ |
| [C] $h(0) < -4$ | [D] O contradomínio de h é $]-\infty, 3]$ |

2. Seja A um acontecimento possível, cuja probabilidade é diferente de 1.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $p(A|A)$?

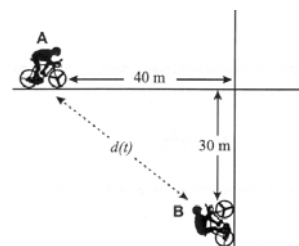
- | | | | |
|------------|-------|----------------|-------|
| [A] $p(A)$ | [B] 1 | [C] $[p(A)]^2$ | [D] 0 |
|------------|-------|----------------|-------|

3. Na figura estão representados dois ciclistas, A e B, pedalando a caminho de um cruzamento. Ao chegarem ao cruzamento, ambos continuam em frente.

No instante $t = 0$, os ciclistas A e B encontram-se, respectivamente, a 40 metros e a 30 metros do cruzamento.

Os ciclistas pedalam ambos à mesma velocidade, que se mantém constante.

Qual dos gráficos seguintes pode ser o da função que, para cada valor de t , dá a distância $d(t)$ entre os dois ciclistas, no instante t ?



- | | | | |
|-------------|-------------|-------------|-------------|
| <p>[A] </p> | <p>[B] </p> | <p>[C] </p> | <p>[D] </p> |
|-------------|-------------|-------------|-------------|

4. Considere uma função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^{x-a}$, onde a designa um certo número real.

O gráfico de f intersecta o eixo Oy no ponto de ordenada 2.

Indique o valor de a .

- | | | | |
|--------|-----------------------|-----------|-----------------|
| [A] -2 | [B] $\ln \frac{1}{2}$ | [C] e^2 | [D] $1 - \ln 2$ |
|--------|-----------------------|-----------|-----------------|

5. Qual é o limite da sucessão de termo geral $u_n = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \right)$?

[A] Não existe

[B] $+\infty$

[C] 0

[D] $-\infty$

6. Na figura está representada parte do gráfico de uma função h , de domínio \mathbb{R} , bem como parte da recta tangente ao gráfico de h , no ponto $(0, 3)$.

Esta recta intersecta o eixo Ox no ponto de abcissa 3.

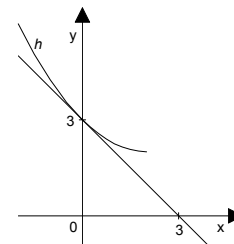
Qual das expressões seguintes pode definir h' , função derivada de h ?

[A] $\frac{x}{2} - 1$

[B] $2 - \frac{x}{3}$

[C] $1 - \frac{x}{2}$

[D] $\frac{x}{3} - 2$



7. Para um determinado número natural n , o desenvolvimento de $(x + 2y)^n$ é:

$$x^6 + 12x^5y + \underline{\hspace{2cm}} + 160x^3y^3 + 240x^2y^4 + 192xy^5 + 64y^6$$

O termo em falta é:

[A] $15x^4y^2$

[B] $20x^4y^2$

[C] $60x^4y^2$

[D] $140x^4y^2$

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Seja C o conjunto dos números complexos e i a unidade imaginária.

a) Sem recorrer à calculadora, calcule, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas do número complexo

$$z_1 = 1 - \sqrt{3}i, \text{ simplificando o mais possível as expressões obtidas.}$$

b) Seja z um número complexo cuja imagem geométrica, no plano complexo, é um ponto A situado no segundo quadrante e pertencente à recta definida pela condição $\operatorname{Re}(z) = -2$.

Seja B a imagem geométrica de $i \cdot z$.

Seja O a origem do referencial.

Represente, no plano complexo, um triângulo $[AOB]$, de acordo com as condições enunciadas.

Sabendo que a área do triângulo $[AOB]$ é 8, **determine** z , na forma algébrica.

2. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = 3x - 2 \ln x$ (\ln designa logaritmo de base e).

a) Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as duas alíneas seguintes:

a1) Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

a2) Mostre que a função f tem um único mínimo e que o seu gráfico não possui pontos de inflexão.

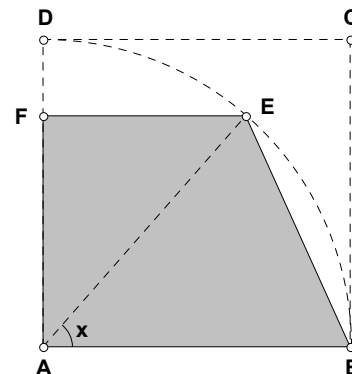
b) O gráfico de f contém um único ponto cuja ordenada é o quadrado da abcissa.

Recorrendo à sua calculadora, determine um valor aproximado para a abcissa desse ponto (apresente o resultado arredondado às décimas).

Explique como procedeu (na sua explicação, deve incluir o gráfico, ou gráficos, que considerou para resolver esta questão).

3. Na figura está representado a sombreado um polígono [ABEF]. Tem-se que:

- [ABCD] é um quadrado de lado 2
- BD é um arco de circunferência de centro em A; o ponto E move-se ao longo deste arco; em consequência, o ponto F desloca-se sobre o segmento [AD], de tal forma que se tem sempre [EF] ⊥ [AD]
- x designa a amplitude, em radianos, do ângulo BAE ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$)



A área do polígono [ABEF] é dada, em função de x, por

$$A(x) = 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} (2x)$$

- a) Calcule $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} A(x)$ e interprete geometricamente o valor obtido.
- b) Sem recorrer à calculadora gráfica, estude a função A quanto à monotonia e determine o valor de x para o qual a área do polígono [ABEF] é máxima.

4.

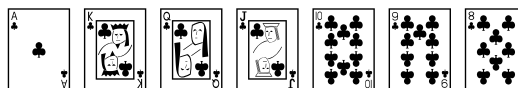
- a) Seja S o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$). Sabendo que A e B são acontecimentos independentes, prove que

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \times p(\bar{A})$$

- b) Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus. Cada naipe tem três figuras: Rei, Dama e Valete.

- b1) Retira-se, ao acaso, uma carta de um baralho completo. Utilizando a igualdade referida na alínea anterior, determine a probabilidade de a carta extraída ser uma figura ou uma espada. Apresente o resultado na forma de fracção irredutível.

Nota: Deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.



- b2) Seleccionaram-se sete cartas do naipe de paus:

Dispõem-se as sete cartas, em fila, em cima de uma mesa. Explicando o seu raciocínio, determine quantas disposições diferentes podem ser feitas, de modo que o Rei não fique ao lado da Dama.

5. A Sofia preparou um pudim, para servir como sobremesa ao jantar. Depois de o ter confeccionado, a Sofia colocou o pudim a arrefecer, na bancada da cozinha. Uma hora depois, colocou-o no frigorífico, para ficar bem frio.

Admita que a temperatura do pudim, em graus centígrados, t minutos depois de ter sido colocado na bancada, é dada por

$$f(t) = \begin{cases} 20 + 80 \times 2^{-0,05t} & \Leftarrow 0 \leq t < 60 \\ 6 + 24 \times 2^{-0,05(t-60)} & \Leftarrow t \geq 60 \end{cases}$$

Utilizando métodos exclusivamente analíticos, resolva as duas questões seguintes:

- Atendendo a que a função é contínua, utilize o Teorema de Bolzano-Cauchy para mostrar que, antes de o pudim ter sido colocado no frigorífico, houve um instante em que a sua temperatura foi de 35° C.
- Quanto tempo deverá o pudim estar no frigorífico, para que a sua temperatura fique igual a doze graus centígrados? Apresente o resultado em minutos.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte 63 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS							
		0	1	2	3	4	5	6	7
C E R T A S	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	0	0	
	2	18	15	12	9	6	3		
	3	27	24	21	18	15			
	4	36	33	30	27				
	5	45	42	39					
	6	54	51						
7	63								

2.ª Parte 137 pontos

1. 30 pontos

a) 14

b) 16

2. 38 pontos

a1) 13

a2) 15

b) 10

3. 25 pontos

a) 10

b) 15

4. 32 pontos

a) 10

b1) 10

b2) 12

5. 12 pontos

Total 200 pontos