

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. No desenvolvimento de $(x + y)^8$, um dos termos é $k x^5 y^3$. Qual é o valor de k ?

- [A] 56 [B] 28 [C] 16 [D] 8

2. A figura representa um trapézio [ABCD]. Tem-se que $\overline{BC} = 4$ e $\overline{CD} = 10$.

Seja $x \in]0, \pi[$ a amplitude do ângulo BCD e seja $f(x) = \overline{AB}$ (f é, portanto, a função que, a cada x , associa o comprimento da base [AB] do trapézio, quando a amplitude do ângulo BCD é x).



Qual das afirmações seguintes sobre a função f é verdadeira?

- [A] $f(\frac{\pi}{2}) = 4$ [B] $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 4$ [C] $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 6$ [D] $f(\frac{\pi}{2}) = 6$

3. Considere uma função g , de domínio $[0, +\infty[$, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que:

- o gráfico de g tem uma única assíntota
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{1}{2}$

Em qual das alternativas seguintes podem estar representadas, em referencial o. n. xOy , parte do gráfico da função g e, a tracejado, a sua assíntota?

[A]

[B]

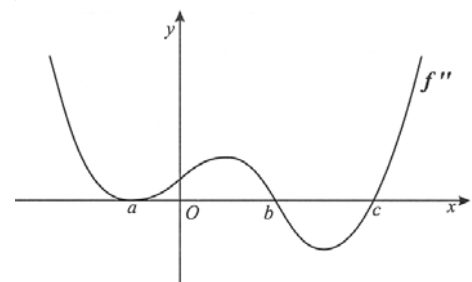
[C]

[D]

4. Seja f uma função de domínio \mathbb{R} . Na figura está representada parte do gráfico de f'' , 2.ª derivada da função f .

Relativamente ao gráfico da função f , qual das afirmações seguintes é verdadeira?

- [A] O ponto de abcissa a é um ponto de inflexão.
 [B] O ponto de abcissa c é um ponto de inflexão.
 [C] A concavidade está voltada para baixo no intervalo $[0, b]$.
 [D] A concavidade está sempre voltada para cima.



5. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$). Tem-se que: $p(A \cap B) = 10\%$, $p(A) = 50\%$ e $p(A \cup B) = 80\%$. Qual é o valor da probabilidade condicionada $p(A | B)$?

[A] $\frac{1}{2}$

[B] $\frac{1}{3}$

[C] $\frac{1}{4}$

[D] $\frac{1}{5}$

2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.
- a) Escolhe-se ao acaso, um desses números. Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 5. Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondada às unidades.
- b) Explicitando o seu raciocínio, resolva o seguinte problema:
- «De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:
- começam por 9;
 - têm os algarismos todos diferentes;
 - a soma dos quatro algarismos é par.
- Quantos são esses números?»

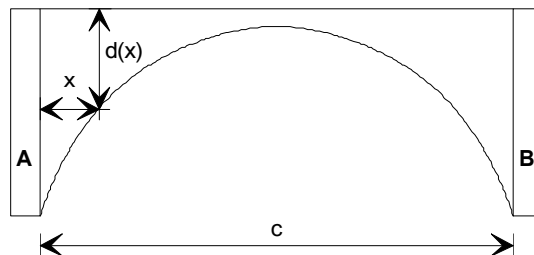
2. Em C, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = \text{cis}(-\frac{\pi}{5})$.
- a) Resolva a equação $(1 + 2i)z = 6 + z_1 \times \overline{z_1}$. Apresente a solução na forma algébrica.
- b) Seja A o conjunto dos números complexos que satisfazem a condição: $|z| = 1 \wedge \text{Im}(z) \geq 0$. Indique, justificando, se algum dos números complexos z_1 ou z_2 pertence a A.
- c) Determine, na forma trigonométrica, $\frac{(z_1)^3}{z_2}$.

3. A figura representa uma ponte, com o arco construído entre dois pilares A e B.

Considere a função d definida por

$$d(x) = 10 - 3 \ln(-x^2 + 8x + 9)$$

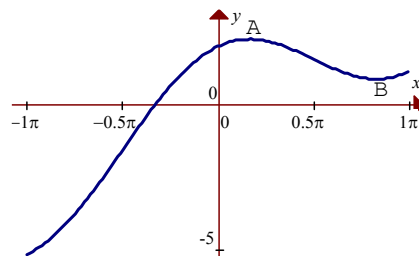
Admita que $d(x)$ é a distância ao tabuleiro da ponte, em metros, do ponto do arco situado a x metros à direita do pilar A.



- a) Sabendo que os dois pilares têm a mesma altura, mostre que o vão do arco (c) é de 8 metros.
- b) Sem recorrer à calculadora gráfica, estude a função d quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante dos dois pilares que a distância do arco ao tabuleiro da ponte é mínima.

Nota: Pode ser útil considerar que $-x^2 + 8x + 9 = -(x + 1)(x - 9)$.

4. Na figura está representado o gráfico de uma função g , de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por $g(x) = x + 2\cos x$.
A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de g .
Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.

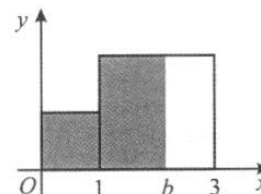


- a) Mostre que a ordenada do pontos B é $\frac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$.
- b) Determine as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de g .
5. Considere a função f , de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{x} & \Leftarrow x < 0 \\ \text{sen}(2x) - \cos x & \Leftarrow x \geq 0 \end{cases}$.
- a) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva as alíneas seguintes:
- a1) Estude a função f quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.
- a2) Verifique se a função f tem um máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e, em caso afirmativo, determine-o.
- b) Recorrendo à sua calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > x - 4$ pertencentes ao intervalo $[-6, 6]$. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

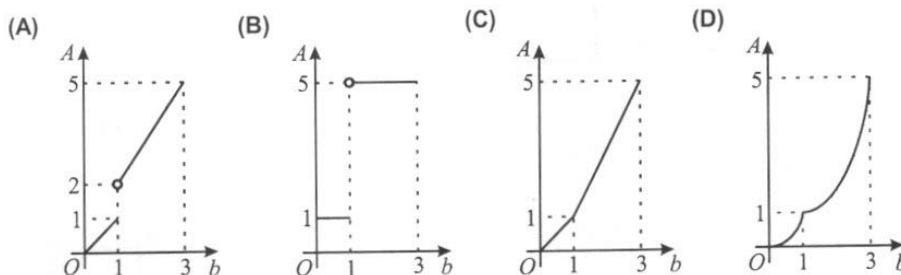
Opção

Das três questões seguintes, **resolva apenas uma**.

- A. Na figura estão representados, em referencial o. n. xOy , dois quadrados. Considere, para cada valor de $b \in [0, 3]$, a área $A(b)$ da região sombreada (região interior à figura formada pelos dois quadrados e compreendida entre o eixo das ordenadas e a recta de equação $x = b$).



Dos gráficos seguintes, apenas um deles pode ser o da função A . Qual? Numa pequena composição, explique por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.



- B. Considere a função de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \frac{e}{x}$. (e designa o número de Neper)
Sejam a e b dois quaisquer números reais não nulos. Considere as rectas r e s , tangentes ao gráfico de f nos pontos de abcissas a e b , respectivamente.
Prove que as rectas r e s **não** podem ser perpendiculares.
- C. Considere a função g da **Questão 4**. Usando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $g'(0)$.

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
C E R T A S	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
	5	45					

2.ª Parte 155 pontos

1. 32 pontos

a) 14

b) 18

2. 30 pontos

a) 10

b) 8

c) 12

3. 23 pontos

a) 10

b) 13

4. 22 pontos

a) 12

b) 10

5. 38 pontos

a1) 12

a2) 12

b) 14

6. 10 pontos

Total 200 pontos