Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

21/05/2004 **Turmas A e B - Prova 1** **12.º Ano**

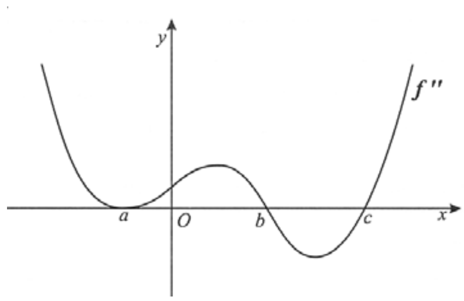
Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
Atenção! *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação****: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Seja *f* uma função de domínio *IR*. Na figura está representada parte do gráfico de *f''*, 2.ª derivada da função *f*.

Relativamente ao gráfico da função *f*, qual das afirmações seguintes é verdadeira?



[A] A concavidade está voltada para baixo no intervalo [0, b].

[B] A concavidade está sempre voltada para cima.

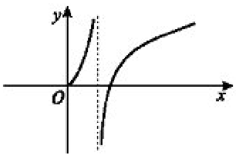
[C] O ponto de abcissa *a* é um ponto de inflexão.

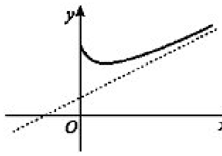
[D] O ponto de abcissa *c* é um ponto de inflexão.

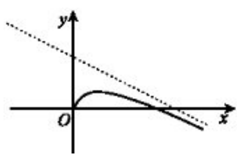
2. Considere uma função *g*, de domínio $[0, +\infty[$, contínua em todo o seu domínio. Sabe-se que:

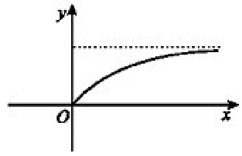
- o gráfico de *g* tem uma única assimptota
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \dfrac{1}{2}$

Em qual das alternativas seguintes podem estar representadas, em referencial o. n. *xOy*, parte do gráfico da função *g* e, a tracejado, a sua assimptota?

[A]


[B]


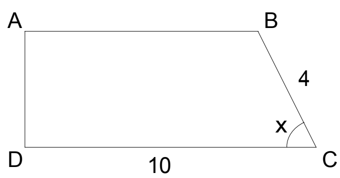
[C]


[D]


3. No desenvolvimento de $(x+y)^8$, um dos termos é $k\,x^5 y^3$. Qual é o valor de k?

[A] 8 **[B]** 16 **[C]** 28 **[D]** 56

4. A figura representa um trapézio [ABCD]. Tem-se que $\overline{BC} = 4$ e $\overline{CD} = 10$.
Seja $x \in]0, \pi[$ a amplitude do ângulo BCD e seja $f(x) = \overline{AB}$ (*f* é, portanto, a função que, a cada *x*, associa o comprimento da base [AB] do trapézio, quando a amplitude do ângulo BCD é *x*).



Qual das afirmações seguintes sobre a função *f* é verdadeira?

[A] $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 6$ **[B]** $f(\frac{\pi}{2}) = 6$ **[C]** $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 4$ **[D]** $f(\frac{\pi}{2}) = 4$

5. Seja E o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset E$ e $B \subset E$).
Tem-se que: $p(A \cap B) = 10\%$, $p(A) = 50\%$ e $p(A \cup B) = 80\%$.
Qual é o valor da probabilidade condicionada $p(A \mid B)$?

[A] $\frac{1}{5}$ **[B]** $\frac{1}{4}$ **[C]** $\frac{1}{3}$ **[D]** $\frac{1}{2}$

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. Considere todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9.

a) Escolhe-se ao acaso, um desses números.
Determine a probabilidade de o número escolhido ter exactamente dois algarismos iguais a 5.
Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondada às unidades.

b) Explicitando o seu raciocínio, resolva o seguinte problema:

«*De todos os números de quatro algarismos que se podem formar com os algarismos de 1 a 9, alguns deles cumprem as três condições seguintes:*

- *começam por 9;*
- *têm os algarismos todos diferentes;*
- *a soma dos quatro algarismos é par.*

Quantos são esses números?»

2. Em C, conjunto dos números complexos, considere: $z_1 = 1 + \sqrt{3}i$ e $z_2 = cis\,(-\frac{\pi}{5})$.

a) Resolva a equação $(1+2i).z = 6 + z_1 \times \overline{z_1}$. Apresente a solução na forma algébrica.

b) Seja A o conjunto dos números complexos que satisfazem a condição: $|z| = 1 \ \wedge \ \text{Im}(z) \geq 0$.
Indique, justificando, se algum dos números complexos z_1 ou z_2 pertence a A.

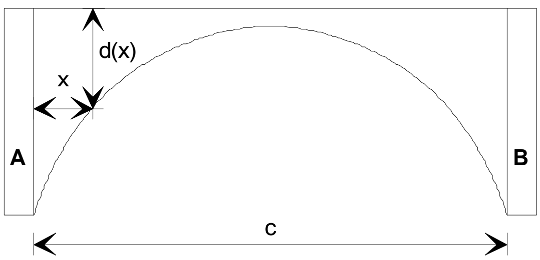
c) Determine, na forma trigonométrica, $\frac{(z_1)^3}{z_2}$.

3. A figura representa uma ponte, com o arco construído entre dois pilares A e B.

Considere a função *d* definida por

$$d(x) = 10 - 3\ln(-x^2 + 8x + 9)$$

Admita que *d(x)* é a distância ao tabuleiro da ponte, em metros, do ponto do arco situado a *x* metros à direita do pilar A.



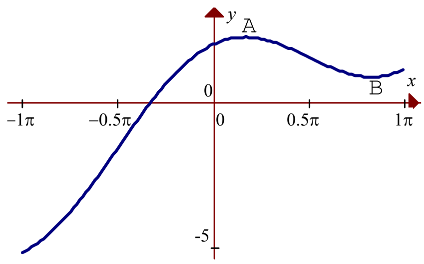
a) Sabendo que os dois pilares têm a mesma altura, mostre que o vão do arco (*c*) é de 8 metros.

b) Sem recorrer à calculadora gráfica, estude a função *d* quanto à monotonia e conclua daí que, tal como a figura sugere, é num ponto equidistante dos dois pilares que a distância do arco ao tabuleiro da ponte é mínima.

Nota: Pode ser útil considerar que $-x^2 + 8x + 9 = -(x+1)(x-9)$.

4. Na figura está representado o gráfico de uma função *g*, de domínio $[-\pi, \pi]$, definida por $g(x) = x + 2\cos x$.
A e B são pontos do gráfico cujas ordenadas são extremos relativos de *g*.

Sem recorrer à calculadora, resolva as duas alíneas seguintes.



a) Mostre que a ordenada do pontos B é $\dfrac{5\pi - 6\sqrt{3}}{6}$.

b) Determine as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de *g*.

5. Considere a função *f*, de domínio *IR*, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{x} & \Leftarrow \quad x < 0 \\ sen\,(2x) - \cos x & \Leftarrow \quad x \geq 0 \end{cases}$.

a) Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva as alíneas seguintes:

a1) Estude a função *f* quanto à existência de assimptotas paralelas aos eixos coordenados.

a2) Verifique se a função *f* tem um máximo no intervalo $]-\infty, 0[$ e, em caso afirmativo, determine-o.

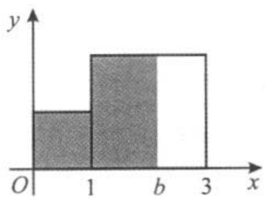
b) Recorrendo à sua calculadora, determine as soluções inteiras da inequação $f(x) > x - 4$ pertencentes ao intervalo $[-6, 6]$. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

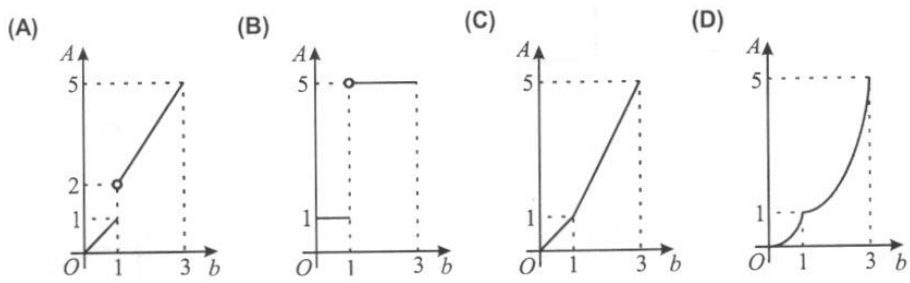
Opção

*Das três questões seguintes, **resolva apenas uma**.*

A. Na figura estão representados, em referencial o. n. *xOy*, dois quadrados.
Considere, para cada valor de $b \in [0, 3]$, a área $A(b)$ da região sombreada (região interior à figura formada pelos dois quadrados e compreendida entre o eixo das ordenadas e a recta de equação $x = b$).

Dos gráficos seguintes, apenas um deles pode ser o da função *A*. Qual?
Numa pequena composição, explique por que é que os outros três estão incorrectos, apresentando, para cada um deles, uma razão pela qual o rejeita.





B. Considere a função de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por $f(x) = \dfrac{e}{x}$. (*e* designa o número de Neper)

Sejam *a* e *b* dois quaisquer números reais não nulos. Considere as rectas *r* e *s*, tangentes ao gráfico de *f* nos pontos de abcissas *a* e *b*, respectivamente.

Prove que as rectas *r* e *s* **não** podem ser perpendiculares.

C. Considere a função *g* da **Questão 4**. Usando a definição de derivada de uma função num ponto, calcule $g'(0)$.

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 45 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
	5	45					

2.ª Parte .... 155 pontos

1. .... 32 pontos
   - a) 14
   - b) 18
2. .... 30 pontos
   - a) 10
   - b) 8
   - c) 12
3. .... 23 pontos
   - a) 10
   - b) 13
4. .... 22 pontos
   - a) 12
   - b) 10
5. .... 38 pontos
   - a1) 12
   - a2) 12
   - b) 14
6. .... 10 pontos

Total 200 pontos