

# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Prova Escrita de Matemática

26/03/2004

Turmas A e B - Prova 2

12.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

**Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória  $X$  é:

$x_i$	0	1	2
$P(X = x_i)$	$2a$	$a$	$2a$

Qual é o valor de  $a$  ?

[A]  $\frac{1}{2}$

[B]  $\frac{1}{3}$

[C]  $\frac{1}{4}$

[D]  $\frac{1}{5}$

2. Na figura ao lado está a representação gráfica de uma função  $h$ :

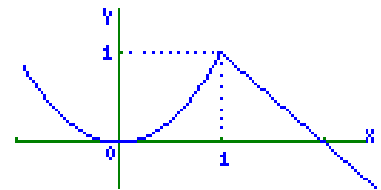
Podemos então concluir que

[A]  $h'(1) = 1$

[B]  $h'(1) = 0$

[C]  $h'(1)$  não existe

[D]  $h'(1) = +\infty$



3. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \ln x$ .

Seja  $(u_n)$  a sucessão de termo geral  $u_n = (1 + \frac{1}{n})^n$ .

Qual é o valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$  ?

[A] 0

[B] 1

[C]  $e$

[D]  $+\infty$

4. De uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^-$ , sabe-se que a recta de equação  $y = 3$  é assíntota do seu gráfico.

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{e^x}$  ?

[A] 0

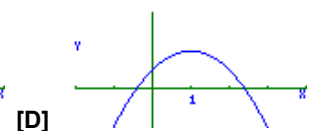
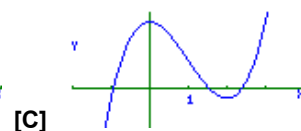
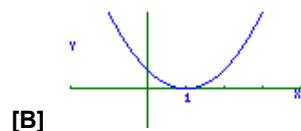
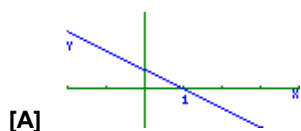
[B]  $-\infty$

[C]  $+\infty$

[D] 3

5. Seja  $g$  uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa 1.

Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da **segunda derivada** de  $g$  ?



## 2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por

$$f(x) = 2x - x \cdot \ln x \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três primeiras alíneas.

- a) Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de  $f$  com o eixo  $Ox$ .
- b) Estude  $f$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
- c) Estude a função  $f$  quanto à monotonia, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico.  
**Sugestão:** Comece por mostrar que  $f'(x) = 1 - \ln x$ , com  $x > 0$ .
- d) Num referencial o. n.  $XOy$ , considere:
  - Parte do gráfico da função  $f$
  - A recta  $r$ , tangente ao gráfico de  $f$  no ponto de abcissa 1
  - A recta  $r$  intersecta o eixo  $Oy$  no ponto B
  - A recta  $r$  intersecta o eixo  $Ox$  no ponto A
- d1) Usando as potencialidades da calculadora gráfica, recolha as informações suficientes para elaborar uma ilustração relativa à descrição feita acima.
- d2) Determine a área do triângulo [AOB].

2. Um pára-quedista salta de um avião. Ao fim de cinco segundos, o pára-quedas abre. Um minuto depois de ter saltado, o pára-quedista atinge o solo.

Admita que a velocidade do pára-quedista, medida em metros por segundo,  $t$  segundos após ele ter saltado do avião, é dada, para um certo valor de  $k$ , por

$$v(t) = \begin{cases} 55 \cdot (1 - e^{kt}) & \Leftarrow t < 5 \\ 6 + 27 \cdot e^{-1,7 \cdot (t-5)} & \Leftarrow t \geq 5 \end{cases}, \text{ com } t \in [0, 60]$$

- a) Sabendo que a função  $v$  é contínua, determine o valor de  $k$ .  
(apresente o resultado arredondado às milésimas)
- b) Utilize o Teorema de Bolzano-Cauchy para mostrar que houve um instante, entre o momento em que saltou e o momento em que o pára-quedas abriu, em que a velocidade do pára-quedista foi de 20 m/s.
- c) Estude a função quanto à monotonia, para  $t \geq 5$ .  
Interprete a conclusão a que chegou.
- d) Comente a seguinte afirmação:

*Após a abertura do pára-quedas, a velocidade tem uma variação acentuada nos primeiros quatro segundos, após os quais estabiliza, permanecendo praticamente constante até à chegada ao solo.*

3. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , definida por:  $g(x) = \ln(x+1)^2$ .

a) Utilizando o teorema da derivada da função composta, mostre que  $g'(x) = \frac{2}{x+1}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .

b) Calcule  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$ .

c) A equação  $g(x) = x + \frac{1}{2}$  tem exactamente uma solução. Recorrendo à sua calculadora, resolva graficamente esta equação. Apresente a solução com aproximação às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

4.

a) Um estudo feito a uma certa marca de iogurtes revelou que:

- se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,005.
- se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,65.

Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dois dos quais estão fora do prazo de validade.

Escolhendo, ao acaso, um desses dez iogurtes, qual é a probabilidade de ele estar estragado?

**Sugestão:** Comece por exprimir os dados em função dos seguintes acontecimentos:

V: o iogurte está dentro do prazo de validade

E: o iogurte está estragado

b) A banda desenhada retrata um episódio de uma aula de Matemática.

A professora propõe um problema à turma, e o João e a Joana são os primeiros a responder.



Ambas as respostas ao problema proposto estão certas.

Numa pequena composição, explique o raciocínio de um dos alunos (à sua escolha).

FIM

# COTAÇÕES

**1.ª Parte** ..... 45 pontos

Cada resposta certa ..... +9 pontos

Cada resposta errada ..... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

**Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.**

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

**2.ª Parte** ..... 155 pontos

1. .... 52 pontos

- a) ..... 9
- b) ..... 9
- c) ..... 18
- d1) ..... 7
- d2) ..... 9

2. .... 44 pontos

- a) ..... 12
- b) ..... 10
- c) ..... 12
- d) ..... 10

3. .... 29 pontos

- a) ..... 10
- b) ..... 9
- c) ..... 10

4. .... 30 pontos

- a) ..... 15
- b) ..... 15

**Total 200 pontos**