

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

26/03/2004

Turmas A e B - Prova 1

12.º Ano

Nome: _____ N.º: _____ Turma: _____

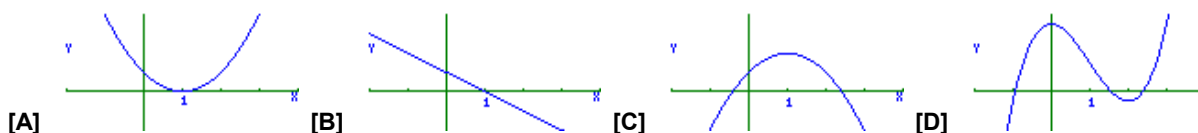
1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

Atenção! Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. Seja g uma função cujo gráfico tem um ponto de inflexão no ponto de abscissa 1.

Qual dos seguintes gráficos poderá ser o da **segunda derivada** de g ?



2. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $f(x) = \ln x$.

Seja (u_n) a sucessão de termo geral $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Qual é o valor de $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$?

[A] e [B] 0 [C] 1 [D] $+\infty$

3. A tabela de distribuição de probabilidades de uma variável aleatória X é:

Qual é o valor de a ?

x_i	0	1	2
$P(X = x_i)$	$2a$	a	$2a$

[A] $\frac{1}{5}$ [B] $\frac{1}{4}$ [C] $\frac{1}{3}$ [D] $\frac{1}{2}$

4. De uma função f , de domínio \mathbb{R}^- , sabe-se que a recta de equação $y = 3$ é assíntota do seu gráfico.

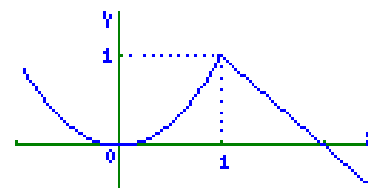
Qual é o valor de $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{e^x}$?

[A] $-\infty$ [B] 0 [C] 3 [D] $+\infty$

5. Na figura ao lado está a representação gráfica de uma função h :

Podemos então concluir que

[A] $h'(1) = 0$ [B] $h'(1) = 1$
[C] $h'(1) = +\infty$ [D] $h'(1)$ não existe



2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Considere a função f , de domínio \mathbb{R}^+ , definida por

$$f(x) = 2x - x \cdot \ln x \quad (\ln \text{ designa logaritmo de base } e)$$

Utilize métodos exclusivamente analíticos para resolver as três primeiras alíneas.

- a) Determine a abcissa do ponto de intersecção do gráfico de f com o eixo Ox .
- b) Estude f quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
- c) Estude a função f quanto à monotonia, extremos, sentido das concavidades e pontos de inflexão do seu gráfico.
Sugestão: Comece por mostrar que $f'(x) = 1 - \ln x$, com $x > 0$.
- d) Num referencial o. n. XOy , considere:
 - Parte do gráfico da função f
 - A recta r , tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1
 - A recta r intersecta o eixo Oy no ponto B
 - A recta r intersecta o eixo Ox no ponto A

d1) Usando as potencialidades da calculadora gráfica, recolha as informações suficientes para elaborar uma ilustração relativa à descrição feita acima.

d2) Determine a área do triângulo $[AOB]$.

2. Um pára-quedista salta de um avião. Ao fim de cinco segundos, o pára-quedas abre. Um minuto depois de ter saltado, o pára-quedista atinge o solo.

Admita que a velocidade do pára-quedista, medida em metros por segundo, t segundos após ele ter saltado do avião, é dada, para um certo valor de k , por

$$v(t) = \begin{cases} 55 \cdot (1 - e^{kt}) & \Leftarrow t < 5 \\ 6 + 27 \cdot e^{-1,7 \cdot (t-5)} & \Leftarrow t \geq 5 \end{cases}, \text{ com } t \in [0, 60]$$

- a) Sabendo que a função v é contínua, determine o valor de k .
(apresente o resultado arredondado às milésimas)
- b) Utilize o Teorema de Bolzano-Cauchy para mostrar que houve um instante, entre o momento em que saltou e o momento em que o pára-quedas abriu, em que a velocidade do pára-quedista foi de 20 m/s.
- c) Estude a função quanto à monotonia, para $t \geq 5$.
Interprete a conclusão a que chegou.
- d) Comente a seguinte afirmação:

Após a abertura do pára-quedas, a velocidade tem uma variação acentuada nos primeiros quatro segundos, após os quais estabiliza, permanecendo praticamente constante até à chegada ao solo.

3. Considere a função g , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por: $g(x) = \ln(x+1)^2$.

a) Utilizando o teorema da derivada da função composta, mostre que $g'(x) = \frac{2}{x+1}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

b) Calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x}$.

c) A equação $g(x) = x + \frac{1}{2}$ tem exactamente uma solução. Recorrendo à sua calculadora, resolva graficamente esta equação. Apresente a solução com aproximação às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, em que se baseou para dar a sua resposta.

4.

a) Um estudo feito a uma certa marca de iogurtes revelou que:

- se um iogurte está dentro do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,005.
- se um iogurte está fora do prazo de validade, a probabilidade de estar estragado é 0,65.

Considere que, num certo dia, uma mercearia tem dez iogurtes dessa marca, dois dos quais estão fora do prazo de validade.

Escolhendo, ao acaso, um desses dez iogurtes, qual é a probabilidade de ele estar estragado?

Sugestão: Comece por exprimir os dados em função dos seguintes acontecimentos:

V: o iogurte está dentro do prazo de validade

E: o iogurte está estragado

b) A banda desenhada retrata um episódio de uma aula de Matemática.

A professora propõe um problema à turma, e o João e a Joana são os primeiros a responder.



Ambas as respostas ao problema proposto estão certas.

Numa pequena composição, explique o raciocínio de um dos alunos (à sua escolha).

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte 45 pontos

Cada resposta certa +9 pontos

Cada resposta errada -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
5	45						

2.ª Parte 155 pontos

1. 52 pontos

- a) 9
- b) 9
- c) 18
- d1) 7
- d2) 9

2. 44 pontos

- a) 12
- b) 10
- c) 12
- d) 10

3. 29 pontos

- a) 10
- b) 9
- c) 10

4. 30 pontos

- a) 15
- b) 15

Total 200 pontos