

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

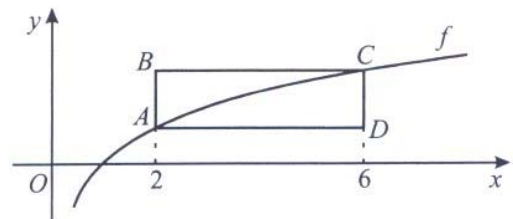
Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.

**Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação:** cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.

1. De uma função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , sabe-se que a recta de equação  $y = 2 - x$  é assíntota do seu gráfico. Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ?

- [A]  $-\infty$                       [B] 2                      [C] -1                      [D]  $+\infty$

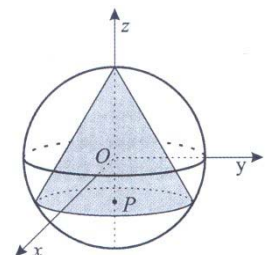
2. Na figura está parte da representação gráfica da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \ln x$ . Os pontos A e C, que pertencem ao gráfico da função  $f$ , são vértices de um rectângulo [ABCD], de lados paralelos aos eixos do referencial. As abcissas de A e de C são 2 e 6, respectivamente. Qual é a área do rectângulo [ABCD]?



- [A]  $\ln 64$                       [B]  $\ln 72$                       [C]  $\ln 81$                       [D]  $\ln 93$

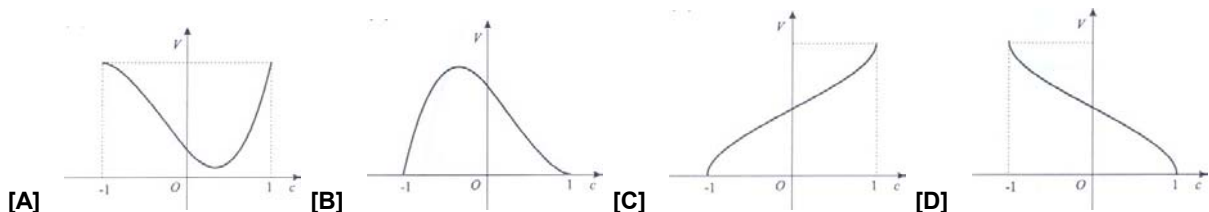
3. Num referencial o. n. Oxyz, considere a superfície esférica de equação  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Um ponto P desloca-se sobre o diâmetro que está contido no eixo Oz. Para cada posição do ponto P, considere o cone, inscrito na superfície esférica, que tem por base o círculo cujo centro é o ponto P e que tem por vértice o ponto  $(0, 0, 1)$ .



Seja  $f$  a função que faz corresponder, à cota  $c$  do ponto P, o volume  $V$  do referido cone.

Qual dos seguintes gráficos pode ser o da função  $f$ ?



4. Sejam A e B dois acontecimentos associados a uma certa experiência aleatória. Sabe-se que A e B são independentes, que  $p(A) = 0,2$  e  $p(B) = 0,5$ . Qual é o valor da probabilidade condicionada  $p(B | A)$  ?

- [A] 0,2                      [B] 0,3                      [C] 0,5                      [D] 0,7

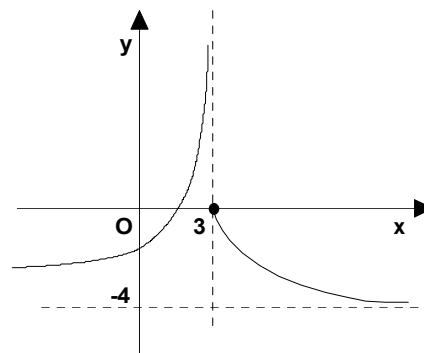
5. Na figura está representado parte do gráfico de uma função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , contínua em  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ .

As rectas de equações  $x = 3$  e  $y = -4$  são as únicas assíntotas do gráfico de  $g$ .

Seja  $(x_n)$  uma sucessão tal que  $\lim g(x_n) = +\infty$ .

Qual das expressões seguintes pode ser o termo geral da sucessão  $(x_n)$ ?

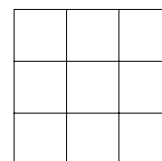
- [A]  $-4 + \frac{1}{n}$                       [B]  $3 + \frac{1}{n}$   
 [C]  $-4 - \frac{1}{n}$                       [D]  $3 - \frac{1}{n}$



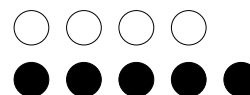
## 2.ª Parte

Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.

1. Pretende-se colocar, sobre um tabuleiro situado à nossa frente, como o representado na figura ao lado, nove peças de igual tamanho e feito, das quais quatro são brancas e cinco são pretas. Cada casa do tabuleiro é ocupada por uma só peça.



- a) Justificando, mostre que existem 126 maneiras diferentes de as peças ficarem colocadas no tabuleiro.
- b) Supondo que as peças são colocadas ao acaso, determine a probabilidade de os quatro cantos do tabuleiro serem ocupadas por peças pretas.



2. Doses terapêuticas iguais de um certo antibiótico são administradas, pela primeira vez, a duas pessoas: a Ana e o Carlos. Admita que, durante as doze primeiras horas após a tomada simultânea do medicamento pela Ana e pelo Carlos, as concentrações de antibiótico, medidas em miligramas por litro de sangue, são dadas respectivamente, por

$$A(t) = 4t^3 e^{-t} \quad \text{e} \quad C(t) = 2t^3 e^{-0,7t}$$

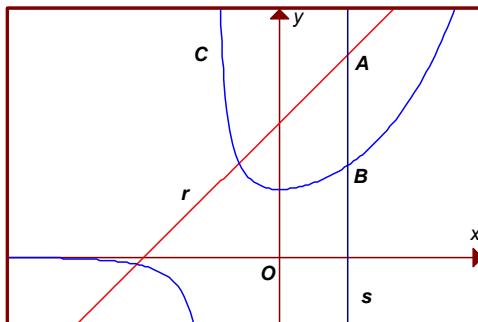
A variável  $t$  designa o tempo, medido em horas, que decorre desde o instante em que o medicamento é tomado ( $t \in [0, 12]$ ).

- a) No instante em que as duas pessoas tomam o medicamento, as concentrações são iguais (por serem nulas). Recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efectuar cálculos numéricos, determine quanto tempo depois as concentrações voltam a ser iguais. Apresente o resultado em horas e minutos (minutos arredondados às unidades).
- b) Considere as seguintes questões:
- Quando a concentração ultrapassa 7,5 miligramas por litro de sangue, o medicamento pode ter efeitos secundários indesejáveis. Esta situação ocorrerá, neste caso, com algumas destas pessoas? Caso afirmativo, com quem? E em quantos miligramas por litro o referido limiar será ultrapassado?
  - Depois de atingir o nível máximo, a concentração começa a diminuir. Quando fica inferior a 1 miligrama por litro de sangue, é necessário tomar nova dose do medicamento. Quem deve tomá-la em primeiro lugar, a Ana ou o Carlos? E quanto tempo antes do outro?

Utilize as capacidades gráficas da sua calculadora para investigar estas duas questões. Numa pequena composição explicita as conclusões a que chegou, justificando-as devidamente. Apresente, na sua resposta, os elementos recolhidos na utilização da calculadora: gráficos e coordenadas de alguns pontos (coordenadas arredondadas às décimas).

3. Na figura estão representadas, em referencial o. n.  $XOy$ :

- uma curva dupla curva  $C$ , gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ , definida por  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$
- uma recta  $r$ , gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $g(x) = x + 2$
- uma recta  $s$ , de equação  $x = 1$ , que intersecta os gráficos das funções  $f$  e  $g$  nos pontos  $B$  e  $A$ , respectivamente



Recorrendo exclusivamente a processos analíticos, resolva as alíneas seguintes:

- Determine  $\overline{AB}$ .
- Recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, mostre que a equação  $f(x) = g(x)$  tem, no intervalo  $]1, 4[$ , pelo menos uma solução.
- Estude a função  $f + g$  quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.
- Resolva a equação  $\ln [f(x)] = g(x)$ .

4. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+1} - x & \leftarrow x < 1 \\ 1 + x + \ln x & \leftarrow x \geq 1 \end{cases}$$

- Justifique que  $g$  não é contínua no ponto 1.
- Mostre que é falsa a seguinte afirmação: «Qualquer que seja a função  $h$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , a função  $g + h$  não é contínua no ponto 1.»
- Justifique que o gráfico de  $g$  admite uma assíntota oblíqua.
- Calcule  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ .

5. A figura representa um reservatório com três metros de altura.

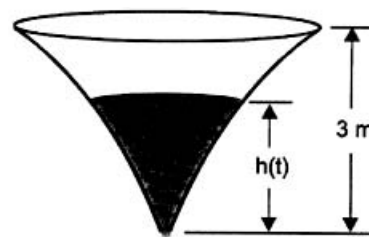
Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.

O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório,  $t$  horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$$h(t) = \log_2(a - bt), \quad t \in [0, 14], \quad \text{onde } a \text{ e } b \text{ são constantes reais positivas.}$$

- Mostre que  $a = 8$  e que  $b = \frac{1}{2}$ .
- Prove que a taxa de variação média de  $h$  no intervalo  $[6, 11]$  é  $-0,2$ . Interprete este valor no contexto da situação descrita.



**FIM**

# COTAÇÕES

**1.ª Parte** ..... 45 pontos

Cada resposta certa ..... +9 pontos

Cada resposta errada ..... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada ..... 0 pontos

**Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.**

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
CERTAS	0	0	0	0	0	0	0
	1	9	6	3	0	0	
	2	18	15	12	9		
	3	27	24	21			
	4	36	33				
	5	45					

**2.ª Parte** ..... 155 pontos

1. .... 20 pontos

a) ..... 12

b) ..... 8

2. .... 28 pontos

a) ..... 12

b) ..... 16

3. .... 50 pontos

a) ..... 8

b) ..... 12

c) ..... 16

d) ..... 14

4. .... 34 pontos

a) ..... 8

b) ..... 10

c) ..... 8

d) ..... 8

5. .... 23 pontos

a) ..... 12

b) ..... 11

**Total 200 pontos**