Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Prova Escrita de Matemática

30/01/2004 **Turmas A e B - Prova 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

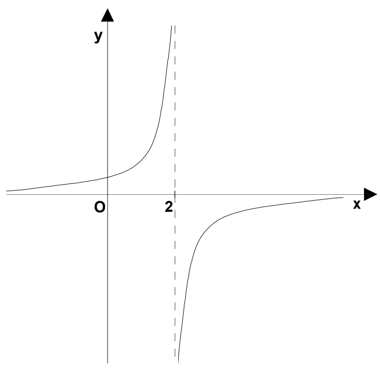
1.ª Parte

Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

1. Uma determinada linha do triângulo de Pascal é constituída por todos os números da forma ${}^{22}C_p$ ($p \in IN_0$).
Escolhendo ao acaso um número dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser 1?

[A] $\frac{1}{23}$ **[B]** $\frac{2}{23}$ **[C]** $\frac{1}{11}$ **[D]** $\frac{1}{22}$

2. Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função *f*, cujo domínio é $IR \setminus \{2\}$. As rectas de equações $x = 2$ e $y = 0$ são assimptotas do gráfico de *f*.



Seja (u_n) a sucessão tal que $u_n = 2 + e^{-n}$.
Qual é o valor de $\lim f(u_n)$?

[A] $+\infty$ **[B]** $-\infty$
[C] 0 **[D]** 2

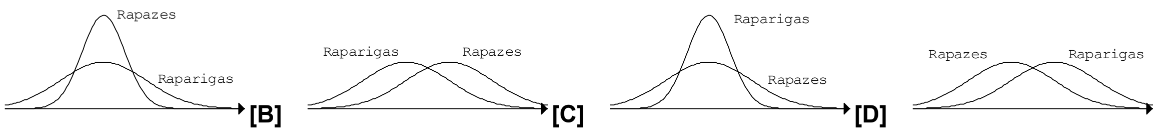
3. Dada a função, de domínio IR^+, definida por $g(x) = \log_4 x$, sabe-se que o ponto *P* faz parte do seu gráfico e tem ordenada igual a 2 . Qual é a abcissa de *P*?

[A] 2 **[B]** $\ln 16$ **[C]** 8 **[D]** 16

4. As alturas, em cm, dos rapazes e das raparigas, alunos do 12.º ano de uma determinada escola, geram distribuições normais de média igual a 170 e desvio padrão, respectivamente, 5 e 10.

Indique qual dos gráficos seguintes pode corresponder às distribuições referidas.

[A] **[B]** **[C]** **[D]**



5. Qual das seguintes expressões é, para todo o número real positivo *a*, equivalente a $e^{\ln 6 + \ln a}$?

[A] e^{6+a} **[B]** $6a$ **[C]** $6 + a$ **[D]** a^6

2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

a) Prove que: $p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times \left[1 - p(B \mid A)\right]$.

Sugestão: Tenha presente que $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$.

b) Uma caixa contém nove bolas, seis verdes e três pretas.
Foram extraídas aleatória e sucessivamente duas bolas, **sem reposição**.
Utilizando a igualdade referida na alínea anterior, determine a probabilidade de as bolas extraídas serem ambas verdes.

Nota: Deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

2. Numa escola, a distribuição dos alunos do 12.º ano por idades e sexo é a seguinte:

	Raparigas	Rapazes
16 anos	8	24
17 anos	12	16

a) Para formar uma comissão que vai preparar um jantar e um baile de finalistas, vão ser sorteados três rapazes e duas raparigas de entre esses 60 jovens. Admita que já estão sorteados **quatro** dos cinco jovens que vão constituir a comissão: **os três rapazes e uma rapariga, a qual tem dezasseis anos de idade**. Para a comissão ficar completa, falta, portanto, escolher aleatoriamente uma rapariga.

Seja *X* a variável aleatória: *número de raparigas de 17 anos que a comissão vai incluir*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável *X*.
Apresente as probabilidades na forma de fracção.

b) Para o jantar de finalistas inscreveram-se os sessenta jovens, 20 raparigas e 40 rapazes, que vão ser distribuídos por 10 mesas de seis lugares. Sabe-se que em cada mesa ficarão 2 raparigas e 4 rapazes.

b1) Determine de quantas formas diferentes pode a comissão constituir o grupo que ficará na mesma mesa que o rapaz e a rapariga que irão abrir o baile.

b2) De cada uma das dez mesas vai escolher-se ao acaso um representante.
Calcule a probabilidade de que, nos 10 representantes, haja exactamente 2 raparigas.
Apresente o resultado na forma de dízima, com quatro casas decimais.

3. Numa experiência laboratorial para obter cloreto de sódio (sal de cozinha), colocou-se numa tina uma certa quantidade de água do mar e expôs-se a uma fonte de calor. Em cada instante *t* a quantidade de água existente na tina é dada pela expressão

$$q(t) = 10^3 \times \log_2 \frac{8}{t+1} \quad (t \in [0, a], a \in IR^+),$$ com *q* em mililitros e *t* em horas.

a) Ao fim de quanto tempo se verifica que 40% da água, inicialmente colocada na tina, tenha passado ao estado gasoso? Dê uma resposta com aproximação ao minuto.

b) A experiência termina quando a água se evaporar na totalidade. Quanto tempo durou a experiência?

c) Considere a função *F*, definida por $F(t) = 3000 - q(t)$.
No contexto da situação apresentada, qual é o significado de $F(t)$?

4. Sob a acção de um medicamento, aplicado no instante $t = 0$, uma população de bactérias variou segundo a lei

$$N(t) = 4(t-1)^2.e^{-t} + 0{,}5 \,, \quad t \geq 0$$

com N expresso em milhões de unidades e t em horas.

a) Determine o número de bactérias da população trinta minutos após a aplicação do medicamento.
Apresente o resultado em unidades de milhar.

b) Sabendo que $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0{,}5$, interprete este valor no contexto da situação descrita.

c) Após a aplicação do medicamento, houve um período durante o qual a população de bactérias aumentou.

Recorra à calculadora para determinar **graficamente** esse período.
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

5. Considere as seguintes funções, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \,; \qquad g(x) = \ln(1-x) - \ln(x+2) \qquad \text{e} \qquad h(x) = 2 + 3.e^{2x-1}$$

a) Recorrendo à definição de Heine, prove que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{3}$.

b) Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \to 2} ((x^3 - 3x - 2) \times f(x))$.

c) Determine os valores de x que verificam a condição $g(x) \leq 0$.

d) Caracterize a função inversa de h.

FIM

COTAÇÕES

1.ª Parte .... 45 pontos

Cada resposta certa .... +9 pontos

Cada resposta errada .... -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada .... 0 pontos

Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.

		ERRADAS					
		0	1	2	3	4	5
C	0	0	0	0	0	0	0
E	1	9	6	3	0	0	
R	2	18	15	12	9		
T	3	27	24	21			
A	4	36	33				
S	5	45					

2.ª Parte .... 155 pontos

1. .... 20 pontos
   - a) 10
   - b) 10

2. .... 30 pontos
   - a) 10
   - b1) 10
   - b2) 10

3. .... 30 pontos
   - a) 12
   - b) 10
   - c) 8

4. .... 33 pontos
   - a) 10
   - b) 8
   - c) 15

5. .... 42 pontos
   - a) 10
   - b) 10
   - c) 12
   - d) 10

Total 200 pontos