# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Prova Escrita de Matemática

**30/01/2004** **Turmas A e B - Prova 1** **12.º Ano**

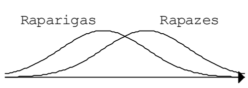
*Nome:* ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

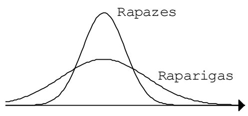
# 1.ª Parte

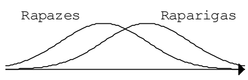
*Para cada uma das seguintes 5 questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e <u>escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde</u>.*
***Atenção!** Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua. **Cotação**: cada resposta certa, +9 pontos; cada resposta errada, -3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

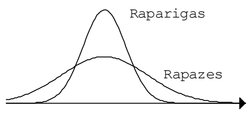
**1.** As alturas, em cm, dos rapazes e das raparigas, alunos do 12.º ano de uma determinada escola, geram distribuições normais de média igual a 170 e desvio padrão, respectivamente, 5 e 10.

Indique qual dos gráficos seguintes pode corresponder às distribuições referidas.

**[A]** 


**[B]** 


**[C]** 

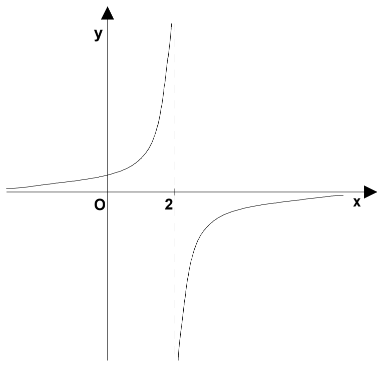

**[D]** 


**2.** Qual das seguintes expressões é, para todo o número real positivo *a*, equivalente a $e^{\ln 6+\ln a}$?

**[A]** $6+a$ **[B]** $a^6$ **[C]** $e^{6+a}$ **[D]** $6a$

**3.** Na figura está desenhada parte da representação gráfica de uma função *f*, cujo domínio é $IR \setminus \{2\}$. As rectas de equações $x=2$ e $y=0$ são assimptotas do gráfico de *f*.

Seja $(u_n)$ a sucessão tal que $u_n = 2+e^{-n}$.
Qual é o valor de $\lim f(u_n)$ ?




**[A]** 0 **[B]** 2
**[C]** $+\infty$ **[D]** $-\infty$

**4.** Dada a função, de domínio $IR^+$, definida por $g(x)=\log_4 x$, sabe-se que o ponto *P* faz parte do seu gráfico e tem ordenada igual a 2. Qual é a abcissa de *P*?

**[A]** 16 **[B]** 8 **[C]** $\ln 16$ **[D]** 2

**5.** Uma determinada linha do triângulo de Pascal é constituída por todos os números da forma $^{22}C_p$ ($p \in IN_0$).
Escolhendo ao acaso um número dessa linha, qual é a probabilidade de ele ser 1?

**[A]** $\frac{1}{22}$ **[B]** $\frac{1}{11}$ **[C]** $\frac{2}{23}$ **[D]** $\frac{1}{23}$

# 2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente **o seu raciocínio de forma clara**, indicando todos **os cálculos** que tiver de efectuar e **as justificações** que entender necessárias.*

**1.** Seja $\Omega$ o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos possíveis ( $A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$ ).

**a)** Prove que: $p(A \cap \overline{B}) = p(A) \times \left[1 - p(B \mid A)\right]$.

**Sugestão**: Tenha presente que $A \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B$ .

**b)** Uma caixa contém nove bolas, seis verdes e três pretas.
Foram extraídas aleatória e sucessivamente duas bolas, **sem reposição**.
Utilizando a igualdade referida na alínea anterior, determine a probabilidade de as bolas extraídas serem ambas verdes.

**Nota**: Deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

**2.** Numa escola, a distribuição dos alunos do 12.º ano por idades e sexo é a seguinte:

| | Raparigas | Rapazes |
|---|---|---|
| 16 anos | 8 | 24 |
| 17 anos | 12 | 16 |

**a)** Para formar uma comissão que vai preparar um jantar e um baile de finalistas, vão ser sorteados três rapazes e duas raparigas de entre esses 60 jovens. Admita que já estão sorteados **quatro** dos cinco jovens que vão constituir a comissão: **os três rapazes e uma rapariga, a qual tem dezasseis anos de idade**. Para a comissão ficar completa, falta, portanto, escolher aleatoriamente uma rapariga.

Seja *X* a variável aleatória: *número de raparigas de 17 anos que a comissão vai incluir*.

Construa a tabela de distribuição de probabilidades da variável *X*.
Apresente as probabilidades na forma de fracção.

**b)** Para o jantar de finalistas inscreveram-se os sessenta jovens, 20 raparigas e 40 rapazes, que vão ser distribuídos por 10 mesas de seis lugares. Sabe-se que em cada mesa ficarão 2 raparigas e 4 rapazes.

**b1)** Determine de quantas formas diferentes pode a comissão constituir o grupo que ficará na mesma mesa que o rapaz e a rapariga que irão abrir o baile.

**b2)** De cada uma das dez mesas vai escolher-se ao acaso um representante.
Calcule a probabilidade de que, nos 10 representantes, haja exactamente 2 raparigas.
Apresente o resultado na forma de dízima, com quatro casas decimais.

**3.** Numa experiência laboratorial para obter cloreto de sódio (sal de cozinha), colocou-se numa tina uma certa quantidade de água do mar e expôs-se a uma fonte de calor. Em cada instante *t* a quantidade de água existente na tina é dada pela expressão

$$q(t) = 10^3 \times \log_2 \frac{8}{t+1} \quad ( t \in [0, a], a \in IR^+ ),$$ com *q* em mililitros e *t* em horas.

**a)** Ao fim de quanto tempo se verifica que 40% da água, inicialmente colocada na tina, tenha passado ao estado gasoso? Dê uma resposta com aproximação ao minuto.

**b)** A experiência termina quando a água se evaporar na totalidade. Quanto tempo durou a experiência?

**c)** Considere a função *F*, definida por $F(t) = 3000 - q(t)$.
No contexto da situação apresentada, qual é o significado de $F(t)$?

**4.** Sob a acção de um medicamento, aplicado no instante $t = 0$ , uma população de bactérias variou segundo a lei

$$N(t) = 4(t-1)^2.e^{-t} + 0{,}5 \ , \quad t \geq 0$$

com $N$ expresso em milhões de unidades e $t$ em horas.

**a)** Determine o número de bactérias da população trinta minutos após a aplicação do medicamento. Apresente o resultado em unidades de milhar.

**b)** Sabendo que $\lim\limits_{t \to +\infty} N(t) = 0{,}5$ , interprete este valor no contexto da situação descrita.

**c)** Após a aplicação do medicamento, houve um período durante o qual a população de bactérias aumentou.

Recorra à calculadora para determinar **graficamente** esse período.
Apresente todos os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente o gráfico, ou gráficos, obtido(s), bem como coordenadas relevantes de alguns pontos.

**5.** Considere as seguintes funções, reais de variável real, definidas por:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \ ; \qquad g(x) = \ln(1-x) - \ln(x+2) \qquad \text{e} \qquad h(x) = 2 + 3.e^{2x-1}$$

**a)** Recorrendo à definição de Heine, prove que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{3}$ .

**b)** Calcule, se existir, $\lim\limits_{x \to 2} ((x^3 - 3x - 2) \times f(x))$ .

**c)** Determine os valores de $x$ que verificam a condição $g(x) \leq 0$ .

**d)** Caracterize a função inversa de $h$.

**FIM**

# COTAÇÕES

**1.ª Parte** ........................................................................................................................ 45 pontos

Cada resposta certa ................................................ +9 pontos

Cada resposta errada ............................................. -3 pontos

Cada questão não respondida ou anulada ................ 0 pontos

***Um total inferior a zero na 1.ª Parte vale 0 pontos.***

| | | ERRADAS | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| C | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| E | 1 | 9 | 6 | 3 | 0 | 0 | |
| R | 2 | 18 | 15 | 12 | 9 | | |
| T | 3 | 27 | 24 | 21 | | | |
| A | 4 | 36 | 33 | | | | |
| S | 5 | 45 | | | | | |

**2.ª Parte** ........................................................................................................................ 155 pontos

1. ................................................................................................ 20 pontos
   - a) ........................................................................................ 10
   - b) ........................................................................................ 10

2. ................................................................................................ 30 pontos
   - a) ........................................................................................ 10
   - b1) ...................................................................................... 10
   - b2) ...................................................................................... 10

3. ................................................................................................ 30 pontos
   - a) ........................................................................................ 12
   - b) ........................................................................................ 10
   - c) ........................................................................................ 8

4. ................................................................................................ 33 pontos
   - a) ........................................................................................ 10
   - b) ........................................................................................ 8
   - c) ........................................................................................ 15

5. ................................................................................................ 42 pontos
   - a) ........................................................................................ 10
   - b) ........................................................................................ 10
   - c) ........................................................................................ 12
   - d) ........................................................................................ 10

**Total** **200 pontos**