Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

28/05/2004 **Turmas A e B - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

1[(1)]	2[(2)]	3[(3)]	4[(4)]	5[(5)]	6[(6)]	7[(7)]

Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*
Prova 1	**C**	**B**	**D**	**B**	**D**	**A**	**C**

Questão	*4*	*3*	*6*	*5*	*7*	*2*	*1*
Prova 2	**A**	**D**	**C**	**C**	**B**	**B**	**B**

2.ª Parte

1.

a)

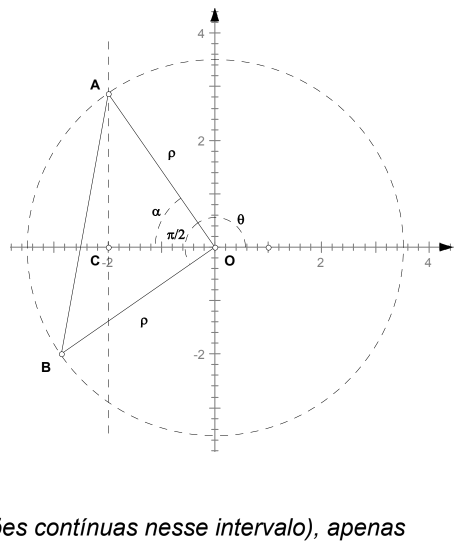
Como $|z_1| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ *e* $\begin{cases} \cos\theta_1 = \dfrac{1}{2} \\ sen\theta_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \theta_1 = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in Z$ *podemos considerar*

$z_1 = 2\,cis\,(-\frac{\pi}{3})$*. Pretendemos, portanto,* $w_k = \sqrt[3]{2}\,cis\,(\frac{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}),\ k \in \{0, 1, 2\}$.

Logo, $w_0 = \sqrt[3]{2}\,cis\,(-\frac{\pi}{9})$*,* $w_1 = \sqrt[3]{2}\,cis\,(-\frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3}) = \sqrt[3]{2}\,cis\,(\frac{5\pi}{2})$ *e* $w_2 = \sqrt[3]{2}\,cis\,(-\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{3}) = \sqrt[3]{2}\,cis\,(\frac{11\pi}{9})$ *são as raízes cúbicas de* $z_1 = 1 - \sqrt{3}i$.

b)

Sendo $z = \rho\,cis\,\theta$*, então* $i\,z = \rho\,cis\,(\theta + \frac{\pi}{2})$.
Logo o triângulo [AOB] é rectângulo (em O) e isósceles. Como a sua área é 8, temos $\frac{\rho \times \rho}{2} = 8$ *e, portanto,* $\rho = 4$.
Considerando o triângulo rectângulo [AOC], temos
$\cos\alpha = \frac{\overline{OC}}{\overline{OA}} = \frac{1}{2}$*, donde* $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *e, portanto,* $\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.
Assim, $z = 4\,cis\,(\frac{2\pi}{3}) = 4 \times (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = -2 + 2\sqrt{3}i$.



2.

a1)

Como f é uma função contínua em IR^+ *(pois é a soma de duas funções contínuas nesse intervalo), apenas poderá haver assimptota vertical em* $x = 0$.
Como $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (3x - 2\ln x) = \underbrace{\lim_{x\to 0^+} 3x}_{0} - 2 \times \underbrace{\lim_{x\to 0^+} \ln x}_{-\infty} = +\infty$*, a recta de equação* $x = 0$ *é a única assimptota vertical do gráfico de f.*

Ora, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x - 2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} (3 - 2 \times \frac{\ln x}{x}) = 3 - 2 \times \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 3 - 2 \times 0 = 3$

e $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - 3x) = \lim_{x\to+\infty} (3x - 2\ln x - 3x) = -\lim_{x\to+\infty} (2\ln x) = -\infty$.

Logo, na vizinhança de $+\infty$*, não existe qualquer assimptota do gráfico de f.*

a2)

Sendo $f'(x) = (3x - 2\ln x)' = 3 - 2 \times \frac{1}{x} = 3 - \frac{2}{x} = \frac{3x-2}{x}$, $\forall x \in IR^+$ *, vem* $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2}{3}$.

x	0		$\frac{2}{3}$	$+\infty$
$3x-2$	-	-	0	+
x	0	+	+	+
$f'(x) = \frac{3x-2}{x}$		-	0	+
$f(x)$		↘	Mín	↗

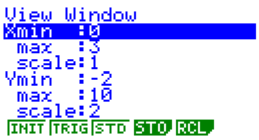
Conclui-se assim que $f(\frac{2}{3})$ *é o único mínimo de f.*

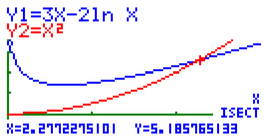
Como $f''(x) = (3 - \frac{2}{x})' = \frac{2}{x^2}, \forall x \in IR^+$ *, conclui-se que* $f''(x) > 0$ *,* $\forall x \in IR^+$ *e, por isso, o gráfico de f não possui pontos de inflexão, visto que apresenta a concavidade voltada para cima em todo o domínio.*

b)

A abcissa pedida é solução da equação $f(x) = x^2$.

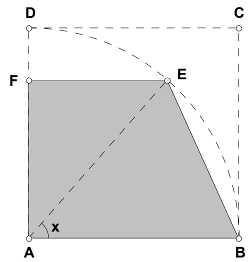
Numa janela de visualização adequada, depois de definidas as funções $y_1 = 3x - 2\ln x$ *e* $y_2 = x^2$*, podemos obter parte dos gráficos das duas funções e determinar as coordenadas do ponto de intersecção dos mesmos:*





Portanto, 2,3 *é um valor aproximado às décimas da abcissa do ponto considerado.*

3.



a)

Ora, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} A(x) = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} (2\,sen\,x + sen\,(2x)) = 2 \times 1 + 0 = 2$.

<u>Interpretação</u>:

Quando $x \to \frac{\pi}{2}$*, o ponto E aproxima-se do ponto D, o mesmo acontecendo com o ponto F. Assim, o quadrilátero [ABEF] tende a coincidir com o triângulo rectângulo [ABD], pelo que a sua área tende para a área do triângulo (* $A_{[ABD]} = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ *).*

b)

Ora, $A'(x) = (2\,sen\,x + sen\,(2x))' = 2\cos x + 2\cos(2x)$*, com* $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Como,

$$2\cos x + 2\cos(2x) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x) = -\cos x$$
$$\Leftrightarrow \cos(2x) = \cos(x + \pi)$$
$$\Leftrightarrow 2x = x + \pi + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = -x - \pi + 2k\pi, \quad k \in Z$$
$$\Leftrightarrow x = \pi + 2k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3}, \quad k \in Z$$

então $A'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}$*, isto é,* $\frac{\pi}{3}$ *é o único zero de A'.*

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$2\cos x + 2\cos(2x)$	4	+ (*)	0	- (*)	-2
$A'(x)$		+	0	-	
$A(x)$		↗	Máx	↘	

(*) Uma função contínua não pode mudar de sinal num intervalo sem anular nesse intervalo.

Conclui-se assim que $\frac{\pi}{3}$ é o valor de x para o qual a área do polígono [ABEF] é máxima.

4.

a)

$$
\begin{aligned}
p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - P(A \cap B) \\
&= p(A) + p(B) - P(A) \times p(B), \text{ pois } A \text{ e } B \text{ são acontecimentos independentes} \\
&= p(A) + P(B) \times [1 - p(A)] \\
&= p(A) + p(B) \times p(\overline{A})
\end{aligned}
$$

b1)

Sejam A e B os acontecimentos seguintes:

***A**: sair uma figura*

***B**: sair uma carta do naipe de espadas*

Assim, a probabilidade pedida é $p(A \cup B) = \frac{12}{52} + \frac{13}{52} \times \frac{40}{52} = \frac{12}{52} + \frac{1}{4} \times \frac{10}{13} = \frac{12}{52} + \frac{10}{52} = \frac{22}{52} = \frac{11}{26}$.

b2)

Porque há mais configurações em que o Rei não fica ao lado da Dama do que configurações em que estas duas cartas ficam juntas, optamos por contar as disposições desfavoráveis.
Há seis posições na fila que garantem a possibilidade de estas duas cartas ficarem juntas (1-2, 2-3, ... , 6-7).
Para cada uma destas possibilidades, podemos permutar estas duas cartas de lugar e, para cada uma dessas configurações, as restantes 5 cartas podem permutar entre si nos 5 lugares disponíveis. Portanto, o número de disposições em que o Rei e a Dama ficam juntos é $N' = 6 \times 2! \times 5! = 1440$.
Dado que o número de disposições das 7 cartas sem qualquer restrição é $P_7 = 7! = 5040$*, o número de disposições de acordo com o pedido é* $N = 5040 - 1440 = 3600$.
(Há 15 disposições (5+4+3+2+1 - verifique) em que as duas cartas consideradas não ficam uma ao lado da outra. Logo, $N = 15 \times 2! \times 5! = 3600$ *)*

5.

Como a função é contínua, também o será no intervalo $[0, 60]$*, que está contido no seu domínio.*
Como $f(0) = 20 + 80 \times 2^0 = 100$ *e* $f(60) = 6 + 24 \times 2^0 = 30$*, então* $f(60) < 35 < f(0)$.
Assim, de acordo com o Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists t \in]0, 60[: f(t) = 35$.
Pelo que podemos concluir que, antes de o pudim ter sido colocado no frigorífico, houve um instante em que a sua temperatura foi de 35º C.

Como

$$
\begin{aligned}
6 + 24 \times 2^{-0{,}05(t-60)} = 12 &\Leftrightarrow 2^{-0{,}05(t-60)} = \frac{1}{4} \\
&\Leftrightarrow 2^{-0{,}05(t-60)} = 2^{-2} \\
&\Leftrightarrow -0{,}05(t-60) = -2 \\
&\Leftrightarrow t - 60 = 40 \\
&\Leftrightarrow t = 100
\end{aligned}
$$

conclui-se que o pudim tem de estar 40 minutos no frigorífico.

FIM

(1) Comece por esboçar num referencial as condições fornecidas.

(2) Note que $p(A \mid A) = \frac{p(A \cap A)}{p(A)} = \frac{p(A)}{p(A)} = 1$, visto $p(A) \neq 0$ dado que o acontecimento A é possível.

(3) Repare que, no instante $t = 0$, a distância entre os ciclistas é de $\sqrt{30^2 + 40^2} = 50$ quilómetros.
A distância entre os ciclistas nunca é nula pois, deslocando-se em direcções perpendiculares, isso apenas poderia acontecer se chegassem ao cruzamento ao mesmo tempo. Situação que não ocorre, visto que se deslocam à mesma velocidade constante e, no momento inicial, encontram-se a distâncias diferentes do cruzamento.

(4) Repare que $f(0) = 2 \Leftrightarrow e^{-a} = 2 \Leftrightarrow -a = \ln 2 \Leftrightarrow a = -\ln 2 \Leftrightarrow a = \ln \frac{1}{2}$.

(5) Repare que, quando $n \to +\infty$, $\frac{1}{n} \to 0^+$ e, então, $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n} \to \frac{\pi}{2}^+$.

Logo, $\lim u_n = \lim \left[tg\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n}\right) \right] = \lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} tg\ x = -\infty$.

(6) A recta tangente ao gráfico de *h*, no ponto $(0, 3)$ tem declive $m = \frac{0-3}{3-0} = -1$.
Logo, tendo presente a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, terá de ser $h'(0) = -1$.

(7) O termo em falta é ${}^6C_2 \times x^4 \times (2y)^2 = 15 \times x^4 \times 4y^2 = 60\, x^4 y^2$.