

# Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

## Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

26/03/2004

Turmas A e B - Prova 1

12.º Ano

Nome: \_\_\_\_\_ N.º: \_\_\_\_\_ Turma: \_\_\_\_\_

### 1.ª Parte

	1 <sup>(1)</sup>	2 <sup>(2)</sup>	3 <sup>(3)</sup>	4 <sup>(4)</sup>	5 <sup>(5)</sup>
<b>Questão</b>	1	2	3	4	5
<b>Prova 1</b>	B	C	A	D	D
<b>Questão</b>	5	3	1	4	2
<b>Prova 2</b>	A	B	D	C	C

### 2.ª Parte

1.

a)

$$\text{Ora, } f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - x \ln x = 0 \Leftrightarrow x(2 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \vee 2 - \ln x = 0 \\ x \in \mathbb{R}^+ \end{cases} \Leftrightarrow \ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2.$$

Logo, é  $e^2$  a abcissa do ponto considerado.

b)

Sendo  $f$  a soma e o produto de funções contínuas em  $\mathbb{R}^+$ , então  $f$  é uma função contínua no seu domínio, pelo que não há assíntotas verticais em qualquer ponto do seu domínio. Vejamos o que se passa em  $x = 0$ :

$$\text{Ora, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x - x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (2x) - \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 - \lim_{y \rightarrow -\infty} (e^y \cdot y) = \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{z}{e^z} = \frac{1}{\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{e^z}{z}} = 0.$$

Fazendo  $y = \ln x$       Fazendo  $z = -y$

Portanto, não existe qualquer assíntota vertical.

Como  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - x \ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - \ln x) = 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = -\infty$ , o gráfico de  $f$  também não possui assíntotas não verticais.

c)

$$\text{Ora, } f'(x) = (2x)' - (x \ln x)' = 2 - \ln x - x \cdot \frac{1}{x} = 1 - \ln x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+.$$

Sendo  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$ , sabendo que a função  $x \rightarrow \ln x$  é estritamente crescente e tem contradomínio  $\mathbb{R}$  e ainda que  $f(2) = 2e - e \ln e = 2e - e = e$ , vem:

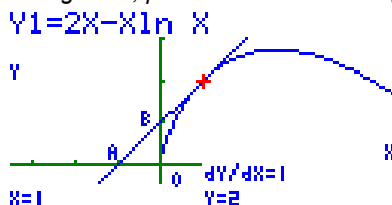
$x$	0		1		$e$	$+\infty$
$\ln x$		-	0	+	1	+
$f'(x) = 1 - \ln x$		+	+	+	0	-
$f(x)$			↗		$e$	↘

Logo,  $f$  é estritamente crescente em  $]0, e[$  e estritamente decrescente em  $]e, +\infty[$ , possuindo o máximo absoluto  $f(e) = e$ , no ponto de abcissa  $x = e$ .

Dado que  $f''(x) = (1 - \ln x)' = 0 - \frac{1}{x} = -\frac{1}{x} < 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$ , o gráfico de  $f$  apresenta sempre a concavidade voltada para baixo e, por isso, não existe qualquer ponto de inflexão.

d1)

Usando as potencialidades da calculadora gráfica, podemos elaborar a seguinte ilustração:



d2)

O declive da recta  $r$  é  $m_r = f'(1) = 1 - \ln 1 = 1$  e o ponto de tangência é  $T(1, f(1)) = (1, 2)$ , pelo que a recta  $r$  pode ser definida por  $y - 2 = 1 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = x + 1$ .

Logo, os pontos  $A$  e  $B$  têm de coordenadas  $(-1, 0)$  e  $(0, 1)$ , respectivamente.

Assim, a área do triângulo  $[AOB]$  é  $A_{\Delta} = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ .

2.

a)

Se  $v$  é contínua, então também o é no ponto de abcissa 5. Logo,  $\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = v(5)$ .

Como  $\lim_{t \rightarrow 5^+} v(t) = v(5) = 6 + 27 \cdot e^0 = 33$ , vem:

$$\lim_{t \rightarrow 5^-} v(t) = 33 \Leftrightarrow 55 \cdot (1 - e^{5k}) = 33 \Leftrightarrow 1 - e^{5k} = \frac{33}{55} \Leftrightarrow e^{5k} = \frac{22}{55} \Leftrightarrow e^{5k} = 0,4 \Leftrightarrow 5k = \ln 0,4 \Leftrightarrow k = \frac{\ln 0,4}{5}$$

Logo,  $k \approx -0,183$ .

b)

Como a função  $v$  é contínua (é um dado), será contínua em qualquer intervalo contido no seu domínio, em particular no intervalo  $t \in [0, 5]$ .

Como  $v(0) = 55 \cdot (1 - 1) = 0$  e  $v(5) = 6 + 27 \cdot e^0 = 33$ , tem-se  $v(0) < 20 < v(5)$ .

Logo, de acordo com o teorema de Bolzano-Cauchy,  $\exists t \in ]0, 5[ : v(t) = 20$  e, portanto, houve um instante, entre o momento em que saltou e o momento em que o pára-quedas abriu, em que a velocidade do pára-quedista foi de 20 m/s.

c)

Para  $t \geq 5$  vem:  $v'(t) = 27 \cdot e^{-1,7 \cdot (t-5)} \times (-1,7) = -45,9 \cdot e^{-1,7 \cdot (t-5)}$ .

Como  $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ , então  $v'(t) < 0, \forall t \in [5, 60]$ , pelo que é  $v$  decrescente nesse intervalo.

Interpretação: após a abertura do pára-quedas, a velocidade do pára-quedista vai diminuindo.

d)

Considerando que  $v(5) = 33$ ,  $v(9) \approx 6,03$  e  $v(60) \approx 6,0$  e, ainda, a alínea anterior, é razoável concluir que a afirmação é verdadeira.

3.

a)

Considerando  $u = (x + 1)^2$ , será  $g(x) = \ln u$ , isto é,  $g$  é a função composta  $g = f \circ u$ , com  $f(x) = \ln x$ .

$$\text{Logo, } g'(x) = \frac{dg}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \times 2 \cdot (x + 1) \cdot (x + 1)' = \frac{1}{(x + 1)^2} \times 2 \cdot (x + 1) = \frac{2}{x + 1}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)^2 - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cdot \ln(x + 1)}{x} = 2 \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 1)}{x} = 2 \times 1 = 2$$

c)

A solução da equação é a abcissa do ponto de intersecção do gráfico da função  $g$  com a recta de equação

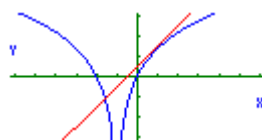
$y = x + \frac{1}{2}$ . Com recurso à calculadora, podemos obter parte do gráfico da função  $g$ , parte da recta de equação

$y = x + \frac{1}{2}$ , bem como a abcissa do ponto de intersecção do gráfico da função com a referida recta:

```

View Window
Xmin :-6.2
max :6.2
scale:1
Ymin :-3.1
max :3.1
scale:1
INIT TRIG STD STO RCL

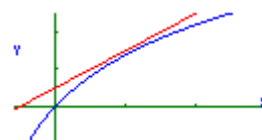
```



```

Y1=ln (X+1)²
Y2=X+.5
ISECT
X=-1.5821284166 Y=-1.0821284166

```



A solução da equação, com aproximação às décimas, é  $-1,6$ .

4.

a)

Aceitando a sugestão, temos:  $p(E | V) = 0,005$ ,  $p(E | \bar{V}) = 0,65$  e  $p(\bar{V}) = 0,2$ .

Logo,  $p(V) = 1 - 0,2 = 0,8$  e

$$p(E \cap V) = p(V) \times p(E | V) = 0,8 \times 0,005 = 0,004$$

$$p(E \cap \bar{V}) = p(\bar{V}) \times p(E | \bar{V}) = 0,2 \times 0,65 = 0,13.$$

Assim, temos:

	V	$\bar{V}$	Total
E	0,004	0,13	0,134
$\bar{E}$			
Total			

Donde,  $p(E) = 0,134$ .

b)

Raciocínio do João:

Existem  ${}^{12}C_7$  maneiras distintas de escolher os sete compartimentos onde se vão colocar os sete iogurtes.

Para cada selecção destes compartimentos, existem  ${}^7A_3$  maneiras diferentes de colocar neles os três iogurtes de frutas (dado que estes iogurtes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).

Colocados os iogurtes de frutas, existe apenas uma maneira de colocar os quatro iogurtes naturais nos quatro lugares disponíveis (visto que estes são indistinguíveis).

Existem, assim,  ${}^{12}C_7 \times {}^7A_3$  maneiras de colocar os sete iogurtes na caixa.

Raciocínio da Joana:

Existem  ${}^{12}C_4$  maneiras distintas de colocar os quatro iogurtes naturais (dado que estes são indistinguíveis, não interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).

Colocados os iogurtes naturais, sobram oito compartimentos para colocar os três iogurtes de frutas. Portanto, para cada uma das maneiras de colocar os iogurtes naturais, existem  ${}^8A_3$  maneiras diferentes de colocar os três iogurtes de fruta na caixa (dado que estes são distintos, interessa a ordem pela qual ficam dispostos na caixa).

Existem, assim,  ${}^{12}C_4 \times {}^8A_3$  maneiras de colocar os sete iogurtes na caixa.

**FIM**

- (1) Se o gráfico de  $g$  tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa 1, então terá de haver mudança de sentido da concavidade do gráfico nesse mesmo ponto. Logo, a segunda derivada terá de ter sinal diferente, antes e depois de esse ponto.
- (2) Tenha em consideração a "primeira definição do número de Neper":  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e$ ; e ainda que  $\lim_{x \rightarrow e} \ln x = 1$ .
- (3) Sabendo que  $P(x=0) + P(x=1) + P(x=2) = 1$ , vem  $2a + a + 2a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{5}$ .
- (4) Note que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = 3 \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x} = +\infty$ , pois a recta de equação  $y = 3$  é assíntota horizontal do gráfico de  $f$  (na vizinhança de  $-\infty$ ) e que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ .
- (5) Recorde a interpretação geométrica das derivadas laterais de uma função num ponto.