Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

27/02/2004 **Turmas A e B - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________	*N.º:* _____	*Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**A**	**C**	**B**	**C**	**D**
Questão	*2*	*4*	*1*	*3*	*5*
Prova 2	**D**	**B**	**A**	**B**	**A**

2.ª Parte

1.

a)
Como as peças de igual cor não são distinguíveis, o número de maneiras diferentes de as peças ficarem colocadas no tabuleiro é o número de maneiras de escolher quatro, das nove casas do tabuleiro, para colocar as peças brancas (ou de escolher cinco para colocar as peças pretas). As peças pretas (brancas) ficam colocadas nas restantes cinco (quatro) casas.
Tratando-se, portanto, de contar o número de subconjuntos com 4 elementos de um conjunto com 9 elementos, o número pedido é $N={}^9C_4={}^9C_5=126$.

b)
Colocadas quatro peças pretas nos quatro cantos do tabuleiro, sobra uma peça preta que pode ocupar qualquer uma das cinco casas livres do tabuleiro. Há, portanto, 5 casos favoráveis, pois seleccionada a casa para colocar a 5.ª peça preta, as quatro brancas ocuparão as restantes quatro casas livres.
Como o número de casos possíveis é o valor calculado na alínea anterior, a probabilidade pedida é $p=\frac{5}{126}$.

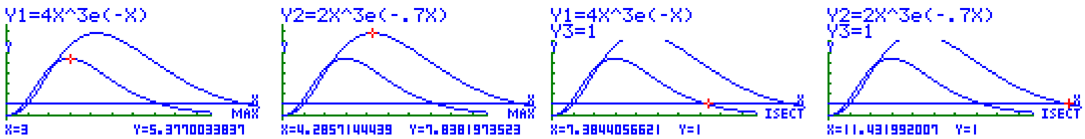
2.

a) *Ora,*

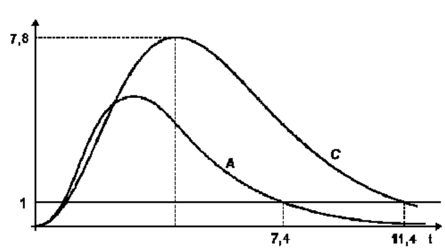
$$\begin{aligned}
4t^3e^{-t}=2t^3e^{-0,7t} &\Leftrightarrow 2t^3(2e^{-t}-e^{-0,7t})=0\\
&\Leftrightarrow t=0 \ \vee\ 2e^{-t}-e^{-0,7t}=0\\
&\Leftrightarrow t=0 \ \vee\ 2=\frac{e^{-0,7t}}{e^{-t}}\\
&\Leftrightarrow t=0 \ \vee\ e^{0,3t}=2\\
&\Leftrightarrow t=0 \ \vee\ 0,3t=\ln 2\\
&\Leftrightarrow t=0 \ \vee\ t=\frac{\ln 2}{0,3}
\end{aligned}$$

Como procuramos $t>0$, *será* $t=\frac{\ln 2}{0,3}\approx 2,31$. *Logo, o tempo pedido é aproximadamente 2h 19m.*

b)
Utilizando as capacidades gráficas da calculadora, foi possível recolher os seguintes elementos:



O nível máximo de concentração do antibiótico no sangue do Carlos ultrapassa em 0,3 miligramas por litro de sangue o limiar a partir do qual o medicamento pode causar efeitos secundários. De facto, como se pode concluir da análise do gráfico da função Y2, o nível máximo de concentração do medicamento no sangue do Carlos é de cerca de 7,8 miligramas por litro. No caso da Ana, essa situação não ocorre, pois o nível máximo de concentração é cerca de 5,4 miligramas por litro de sangue.



A partir das abcissas dos pontos de intersecção dos gráficos com a recta de equação $y = 1$, pode concluir-se que a Ana deve tomar nova dose do medicamento cerca de 7,4 horas depois de ter tomado a primeira, enquanto o Carlos deverá fazê-lo 4 horas depois, ou seja, 11,4 horas depois de ter tomado a sua primeira dose.

3.

a)

As coordenadas dos pontos A e B são, respectivamente, $(1, g(1))$ *e* $(1, f(1))$.

Logo, $\overline{AB} = g(1) - f(1) = (1+2) - (\frac{e^1}{1+1}) = 3 - \frac{e}{2}$.

b)

Ora, $f(x) = g(x) \Leftrightarrow g(x) - f(x) = 0$.

Consideremos, portanto, a função h – função diferença entre as funções g e f – de domínio $IR \setminus \{-1\}$*, sendo, portanto,* $h(x) = x + 2 - \frac{e^x}{x+1}$.

No intervalo $\left]-1, +\infty\right[$*, a função h é contínua, pois é a diferença de duas funções contínuas nesse mesmo intervalo: a primeira, sendo polinomial, é contínua em IR e a segunda é o quociente de duas funções também contínuas em IR (uma exponencial e outra polinomial), não se anulando a função divisor no intervalo considerado. Assim, sendo h contínua em* $\left]-1, +\infty\right[$*, também o é em qualquer intervalo contido neste, em particular no intervalo* $[1, 4]$.

Ora, $h(1) = g(1) - f(1) = 3 - \frac{e}{2} > 0$ *e* $h(4) = 4 + 2 - \frac{e^4}{4+1} = 6 - \frac{e^4}{5} < 0$*, pelo que* $h(4) < 0 < h(1)$.

Logo, de acordo com o Teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c \in \left]1, 4\right[: h(c) = 0$*, ou seja,* $\exists c \in \left]1, 4\right[: g(c) - f(c) = 0$*, pelo que a equação* $f(x) = g(x)$ *tem, no intervalo* $\left]1, 4\right[$*, pelo menos uma solução, visto que* $g(c) - f(c) = 0$ *é equivalente a* $f(c) = g(c)$.

c)

__Determinação de assimptotas verticais:__

Visto que a função $f + g$ *é contínua no seu domínio (*$IR \setminus \{-1\}$*), apenas poderá haver assimptota vertical no ponto* $x = -1$.

- $\lim\limits_{x\to -1^-} [(f+g)(x)] = \lim\limits_{x\to -1^-} (x + 2 + \frac{e^x}{x+1}) = \lim\limits_{x\to -1^-} (x+2) + \lim\limits_{x\to -1^-} e^x \times \lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{e} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to -1^-} \frac{1}{x+1}}_{-\infty} = -\infty$

- $\lim\limits_{x\to -1^+} [(f+g)(x)] = \lim\limits_{x\to -1^+} (x + 2 + \frac{e^x}{x+1}) = \lim\limits_{x\to -1^+} (x+2) + \lim\limits_{x\to -1^+} e^x \times \lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1} = 1 + \frac{1}{e} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to -1^+} \frac{1}{x+1}}_{+\infty} = +\infty$

Logo, a recta de equação $x = -1$ *é uma assimptota vertical bilateral do gráfico da função* $f + g$.

__Determinação de assimptotas não verticais:__

- $m_1 = \lim\limits_{x\to -\infty} \left[\frac{(f+g)(x)}{x}\right] = \lim\limits_{x\to -\infty} (\frac{x+2}{x} + \frac{e^x}{x.(x+1)}) = \underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x+2}{x}}_{1} + \underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty} e^x}_{0} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x.(x+1)}}_{0} = 1$

- $b_1 = \lim\limits_{x\to -\infty} [(f+g)(x) - 1.x] = \lim\limits_{x\to -\infty} (x + 2 + \frac{e^x}{x+1} - x) = 2 + \underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty} e^x}_{0} \times \underbrace{\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{1}{x+1}}_{0} = 2$

Portanto, a recta de equação $y = x + 2$ *é assimptota oblíqua do gráfico da função na vizinhança de* $-\infty$.

Como $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(f+g)(x)}{x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+2}{x}+\frac{e^x}{x.(x+1)}\right)=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x}}_{1}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2}}_{+\infty}\times\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}}_{1}=+\infty$, *não existe qualquer assimptota do gráfico da função na vizinhança de* $+\infty$.

d)

Ora, $\ln[f(x)]=g(x)\Leftrightarrow\ln\frac{e^x}{x+1}=x+2$ *tem domínio* $D=\{x\in R:\frac{e^x}{x+1}>0\}=\{x\in R:x+1>0\}=\left]-1,+\infty\right[$.

Assim,

$$\begin{aligned}\ln[f(x)]=g(x)&\Leftrightarrow \ln\frac{e^x}{x+1}=x+2\\&\Leftrightarrow \ln e^x-\ln(x+1)=x+2\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow x-\ln(x+1)=x+2\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow \ln(x+1)=-2\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow x+1=e^{-2}\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}-1\ \wedge\ x\in\left]-1,+\infty\right[\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}-1\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}\ln[f(x)]=g(x)&\Leftrightarrow \ln\frac{e^x}{x+1}=x+2\\&\Leftrightarrow \frac{e^x}{x+1}=e^{x+2}\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow e^x=(x+1).e^{x+2}\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow \frac{e^x}{e^{x+2}}=x+1\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow x+1=\frac{1}{e^2}\ \wedge\ x\in D\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}-1\ \wedge\ x\in\left]-1,+\infty\right[\\&\Leftrightarrow x=\frac{1}{e^2}-1\end{aligned}$$

4.

a)

Sendo $\lim_{x\to1^-}g(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{2}{x+1}-x\right)=1-1=0$ *e* $\lim_{x\to1^+}g(x)=\lim_{x\to1^+}(1+x+\ln x)=1+1+0=2$, *então não existe* $\lim_{x\to1}g(x)$ *e, consequentemente, a função g não é contínua no ponto 1.*

b)

Seja h a função, de domínio IR, definida por $h(x)=\begin{cases}2 & \Leftarrow\ x<1\\0 & \Leftarrow\ x\geq1\end{cases}$.

A função $g+h$ *é, portanto, a função de domínio IR, definida por* $(g+h)(x)=\begin{cases}\frac{2}{x+1}-x+2 & \Leftarrow\ x<1\\1+x+\ln x & \Leftarrow\ x\geq1\end{cases}$.

Como $\lim_{x\to1^-}(g+h)(x)=\lim_{x\to1^-}\left(\frac{2}{x+1}-x+2\right)=2=\lim_{x\to1^+}(g+h)(x)=\lim_{x\to1^+}(1+x+\ln x)$ *e* $(g+h)(1)=1+1+\ln1=2$, *a função* $g+h$ *é contínua no ponto 1.*
Portanto, não é verdade que «Qualquer que seja a função h, de domínio IR, a função $g+h$ *não é contínua no ponto 1».*

c)

Como $\lim_{x\to-\infty}(g(x)-(-x))=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x+1}-x+x\right)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x+1}=0$, *o gráfico de g admite uma assimptota oblíqua de equação* $y=-x$ *na vizinhança de* $-\infty$.

d)

Ora, $\lim_{x\to+\infty}\frac{g(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x+\ln x}{x}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}}_{0}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}}_{1}+\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{0}=1$.

5.

a)

Tendo em consideração as condições inicial e final, vem:

$$\begin{cases}\log_2(a-b\times0)=3\\\log_2(a-b\times14)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2(a)=3\\\log_2(a-14b)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2^3\\a-14b=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=8\\b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

b)

$$tmv_{[6,\,11]} = \frac{h(11)-h(6)}{11-6} = \frac{\log_2(8-\frac{11}{2})-\log_2(8-3)}{5} = \frac{\log_2(\frac{5}{2})-\log_2(5)}{5} = \frac{\log_2(5)-\log_2(2)-\log_2(5)}{5} = -\frac{1}{5} = -0{,}2\,.$$

A altura da água no reservatório diminui, em média, 20 centímetros por hora, entre os instantes correspondentes a seis e a onze horas após a abertura da válvula.

---

(1) Se a recta de equação $y = 2 - x$ é assimptota oblíqua do gráfico de *f* na vizinhança de $+\infty$, então será $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)-(2-x)] = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to+\infty} (2-x) = -\infty$, então terá de ser $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

(2) As ordenadas dos pontos A e C são, respectivamente, $\ln 2$ e $\ln 6$.

Logo, $\overline{AD} = 6-2 = 4$ e $\overline{CD} = \ln 6 - \ln 2 = \ln\frac{6}{2} = \ln 3$ e, portanto, $A_{[ABCD]} = 4\times\ln 3 = \ln 3^4 = \ln 81$.

(3) Repare que quando $c \to -1$, quer quando $c \to 1$, $V \to 0$. (Por exemplo)

(4) Como A e B são acontecimentos independentes, então $p(B \mid A) = p(B) = 0{,}5$.

(5) Repare que $x_n = 3 - \frac{1}{n} \to 3$ e $x_n < 3, \forall n \in IN$, sendo $\lim\limits_{x\to 3^-} g(x) = +\infty$.