Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

30/01/2004 **Turmas A e B - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________ N.º: _____ Turma: ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	1	2	3	4	5
Prova 1	B	D	D	A	C

Questão	4	5	2	3	1
Prova 2	A	B	B	D	B

2.ª Parte

1.

a)

Aceitando a sugestão, vem:

$$\begin{aligned} p(A\cup B)=p((A\cap \overline{B})\cup B) &\Leftrightarrow p(A)+p(B)-p(A\cap B)=p(A\cap\overline{B})+p(B)-p((A\cap\overline{B})\cap B)\\ &\Leftrightarrow p(A)-p(A\cap B)=p(A\cap\overline{B})-\underbrace{p(A\cap(\underbrace{\overline{B}\cap B}_{\varnothing}))}_{0}\\ &\Leftrightarrow p(A\cap\overline{B})=p(A)-p(A\cap B)\end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} p(A\cap\overline{B}) &= p(A)-p(A\cap B)\\ &= p(A)-[p(A)\times p(B\mid A)]\\ &= p(A)\times[1-p(B\mid A)] \quad \text{, c. q. m.}\end{aligned}$$

b)

No contexto da situação apresentada, sejam A e B os seguintes acontecimentos:

***A**: Sair bola verde na primeira extracção*
***B**: Sair bola preta na segunda extracção*

Assim, a probabilidade pedida é $p=p(A\cap\overline{B})=p(A)\times[1-p(B\mid A)]=\frac{6}{9}\times(1-\frac{3}{8})=\frac{2}{3}\times\frac{5}{8}=\frac{5}{12}$.

2.

a)

Ora, $p(X=0)$ *é a probabilidade de escolher uma rapariga de 16 anos, ou seja,* $\frac{7}{19}$ *(das 20 raparigas que existiam inicialmente, restam 19, pois uma já foi escolhida; como essa rapariga tinha dezasseis anos, restam 7 com essa idade). Logo,* $p(X=1)=1-\frac{7}{19}=\frac{12}{19}$.

Assim, temos a seguinte tabela de distribuição de probabilidades da variável X:

x_i	0	1
$p(X=x_i)$	$\frac{7}{19}$	$\frac{12}{19}$

b1)

Para esse grupo ficar constituído, falta uma rapariga, que pode ser escolhida de entre 19, e três rapazes, que podem ser escolhidos de entre 39.

Assim, esse grupo pode ser constituído de $N={}^{19}C_1\times{}^{39}C_3=19\times 9.139=173.641$ *formas diferentes.*

b2)

Consideremos a seguinte estratégia: as mesas estão numeradas de 1 a 10 e consideramos como casos possíveis as listas de dez jovens constituídas por um elemento de cada mesa, por esta ordem.

Assim, os casos possíveis são $NCP = 6^{10}$*, pois por cada mesa há seis jovens que podem ocupar o lugar correspondente na lista.*

Como em cada mesa há 2 raparigas e 4 rapazes, para que sejam exactamente escolhidos dois representantes do sexo feminino, em duas das mesas são escolhidos raparigas e nas restantes oito são escolhidos rapazes.

Há ${}^{10}C_2 = 45$ *maneiras diferentes de seleccionar as duas mesas onde se escolhem representantes raparigas (nas restantes oito escolhem-se representantes masculinos). Para cada uma destas selecções, podem ser criadas* $N = 2^2 \times 4^8$ *listas distintas, pois podemos escolher entre duas raparigas nas mesas seleccionadas para representação feminina, e entre quatro rapazes em cada uma das oito mesas seleccionadas para representação masculina. Logo, o número de casos favoráveis é* $NCF = 45 \times 2^2 \times 4^8$.

Assim, a probabilidade pedida é $p = \dfrac{45 \times 2^2 \times 4^8}{6^{10}} = \dfrac{5 \times 3^2 \times 2^{18}}{2^{10} \times 3^{10}} = \dfrac{5 \times 2^8}{3^8} = \dfrac{1280}{6561} \approx 0{,}1951$.

<u>Seguem mais duas alternativas</u>:

Ao considerar as duas mesas onde são seleccionadas as raparigas, há ${}^{10}C_2 = 45$ *maneiras diferentes de ocorrer o acontecimento pedido com igual probabilidade:* $\dfrac{2^2 \times 4^8}{6^{10}}$*. Como esses acontecimentos são independentes, a probabilidade pedida é* $p = 45 \times \dfrac{2^2 \times 4^8}{6^{10}} = \dfrac{1280}{6561} \approx 0{,}1951$.

A probabilidade de o representante escolhido em cada uma das mesas ser rapariga é $p(F) = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ *e, portanto,* $p(M) = \dfrac{2}{3}$ *a probabilidade de o representante ser rapaz. Considerando a lei binomial de probabilidades, temos de imediato:* $p(x = 2) = {}^{10}C_2 \times (\frac{1}{3})^2 \times (\frac{2}{3})^8 = 45 \times \dfrac{2^8}{3^{10}} = \dfrac{5 \times 2^8}{3^8} \approx 0{,}1951$.

3.

a)

Comecemos por determinar a quantidade de água inicialmente colocada na tina:

$$q(0) = 10^3 \times \log_2 \frac{8}{0+1} = 10^3 \times \log_2 2^3 = 3 \times 10^3 = 3000 \ \ ml.$$

Se 40% da água inicialmente colocada passou ao estado gasoso, resta na tina $0{,}6 \times 3000 = 1800$ *ml.*

Assim,

$$\begin{aligned} q(t) = 1800 \ &\Leftrightarrow \ 1000 \times \log_2 \frac{8}{t+1} = 1800 \\ &\Leftrightarrow \ \log_2 \frac{8}{t+1} = 1{,}8 \\ &\Leftrightarrow \ \frac{8}{t+1} = 2^{1{,}8} \\ &\Leftrightarrow \ t+1 = \frac{8}{2^{1{,}8}} \\ &\Leftrightarrow \ t = 2^{1{,}2} - 1 \end{aligned}$$

Ora, como $2^{1{,}2} - 1 \approx 1{,}297$*, aproximadamente ao fim de 1,297 horas, isto é, 1h 18min (*$0{,}297 \times 60 = 17{,}82$*), 40% da água, inicialmente colocada na tina, passou ao estado gasoso.*

b)

Quando a água se evaporar na totalidade, ter-se-á $q(t) = 0$*:*

$$\begin{aligned} q(t) = 0 \ &\Leftrightarrow \ 1000 \times \log_2 \frac{8}{t+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \log_2 \frac{8}{t+1} = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \frac{8}{t+1} = 1 \\ &\Leftrightarrow \ t+1 = 8 \\ &\Leftrightarrow \ t = 7 \end{aligned}$$

Portanto, a experiência durou 7 horas.

c)

Como vimos na alínea a), a quantidade de água do mar inicialmente colocada na tina foi 3000 ml.
Assim, $F(t)$ *exprime (em mililitros) a quantidade de água que passou ao estado gasoso, em cada instante* $t \in [0, 7]$ *(em horas) no decurso da experiência.*

4.

a)

Ora, $N(0{,}5) = 4 \times (\frac{1}{2} - 1)^2 . e^{-0{,}5} + 0{,}5 = e^{-0{,}5} + 0{,}5 \approx 1{,}107$.

Trinta minutos após a aplicação do medicamento, a população seria cerca de 1107 milhares de bactérias.

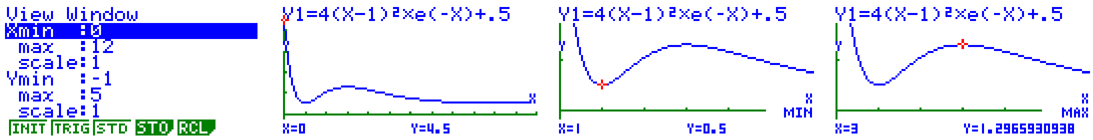
b)

A população de bactérias aproxima-se tanto quanto se queira de meio milhão de unidades, desde que decorra tempo suficiente após a aplicação do medicamento.

c)

Pretende-se determinar o intervalo onde a função $N(t) = 4(t-1)^2 . e^{-t} + 0{,}5$ $(t \geq 0)$ *é crescente.*

Para isso considerou-se a função $y_1 = 4(x-1)^2 . e^{-x} + 0{,}5$ *e (em janelas adequadas, considerando o contexto da situação) determinaram-se as coordenadas de alguns pontos relevantes:*



De acordo com os resultados obtidos, conclui-se que a população de bactérias aumentou no período compreendido entre a 1.ª e 3.ª horas após a aplicação do medicamento.

5.

a)

Ora, $D_f = \{x \in IR : x^2 - 4 \neq 0\} = IR \setminus \{-2, 2\}$.

Seja (x_n) *uma sucessão qualquer, tal que* $x_n \to 1 \ \wedge \ x_n \neq 1 \ \wedge \ x_n \in D_f, \forall n \in IN$.

A respectiva sucessão de imagens é $f(x_n) = \dfrac{1}{(x_n)^2 - 4}$.

Tendo em consideração que $\lim x_n = 1$, *vem* $\lim f(x_n) = \lim \dfrac{1}{(x_n)^2 - 4} = \dfrac{1}{(\lim x_n)^2 - \lim 4} = \dfrac{1}{1^2 - 4} = -\dfrac{1}{3}$.

Logo, de acordo com a definição de Heine, $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = -\frac{1}{3}$.

b)

Ora, tendo em consideração que 2 é um zero dos polinómios numerador e denominador, temos

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & -2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

e, portanto,

$$\lim_{x \to 2} ((x^3 - 3x - 2).f(x)) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x - 2}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \to 2} \frac{(x+1)^2}{(x+2)} = \frac{9}{4} .$$

c)

Ora, $D_g = \{x \in IR : 1 - x > 0 \wedge x + 2 > 0\} = \{x \in IR : x < 1 \wedge x > -2\} =]-2, 1[$.

Logo,

$$\begin{aligned} g(x) \leq 0 &\Leftrightarrow \ln(1-x) - \ln(x+2) \leq 0 \\ &\Leftrightarrow \ln(1-x) \leq \ln(x+2) \\ &\Leftrightarrow (1 - x \leq x + 2) \ \wedge \ x \in D_g \quad \text{, pois a função } x \to \ln x \text{ é estritamente crescente} \\ &\Leftrightarrow x \geq -\tfrac{1}{2} \ \wedge \ x \in D_g \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\tfrac{1}{2}, 1\right[\end{aligned}$$

d)

Ora, $D_h = \{x \in IR : (2x-1) \in IR\} = IR$.

Como, $y = 2 + 3.e^{2x-1} \Leftrightarrow e^{2x-1} = \dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow 2x - 1 = \ln \dfrac{y-2}{3} \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\ln \dfrac{y-2}{3}$

então $D_{h^{-1}} = \{y \in IR : \dfrac{y-2}{3} > 0\} =]2, +\infty[$ *e, portanto*

$$\begin{aligned} m^{-1} : \quad &]2, +\infty[\to IR \\ & x \to \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln \frac{x-2}{3} \end{aligned}$$

FIM

---

(1) Tenha presente que: se as distribuições têm igual média, as curvas de Gauss são simétricas em relação à mesma recta, de equação $x = \overline{x} = 170$; quanto maior é o valor de σ (respectivamente, 5 e 10), maior é a dispersão em torno de $\overline{x} = 170$.

(2) Note que $e^{\ln 6 + \ln a} = e^{\ln(6a)} = 6a$ (tenha presente a definição de logaritmo de um número positivo numa dada base).

(3) Repare que $u_n = 2 + e^{-n} \to 2$ e $u_n > 2, \forall n \in IN$. Logo, $f(u_n) \to -\infty$.

(4) Note que $2 = \log_4 x$. Logo, $x = 4^2 \Leftrightarrow x = 16$.

(5) Essa linha do triângulo de Pascal é constituída por 23 números: ${}^{22}C_0 = 1$, ${}^{22}C_1 = 22$, ${}^{22}C_2 = 231$, ..., ${}^{22}C_{21} = 22$, ${}^{22}C_{22} = 1$. Apenas os valores extremos dessa linha são iguais a 1, logo a probabilidade pedida é $\dfrac{2}{23}$.