Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

21/11/2003 **Turmas A e B - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ________________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	1(1)	2(2)	3(3)	4(4)	5(5)
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**D**	**B**	**B**	**C**	**A**
Questão	*4*	*3*	*2*	*5*	*1*
Prova 2	**A**	**C**	**D**	**B**	**B**

2.ª Parte

1.

a)

A aposta simples é constituída pela selecção de 6 dos 49 números, de 1 a 49.
Ao efectuar uma aposta múltipla de 12 cruzes estamos a seleccionar 12 desses 49 números.
Ao convertermos essa aposta múltipla em apostas simples temos de seleccionar de cada vez apenas 6 desses 12 números. Cada uma dessas apostas diferirá das outras quando pelo menos um dos números seleccionados é diferente, não interessando a ordem por que são escolhidos. Trata-se, portanto, de determinar quantos subconjuntos de 6 elementos é possível obter de um conjunto de 12.

Assim, a aposta múltipla de 12 cruzes corresponde a $^{12}C_6 = \frac{12!}{6!\times 6!} = 924$ *apostas simples.*

b)

<u>Para 3 acertos</u>:
*Das 10 cruzes, três delas assinalam 3 números certos (**C**) - pertencentes à* chave *- e as restantes sete assinalam 7 números errados (**E**) - não pertencentes à chave.*

C C C E E E E E E E

Como a aposta simples é composta por 6 cruzes (seis números), convertendo a aposta múltipla em apostas simples conclui-se que as apostas premiadas, além das três cruzes certas, serão completadas com 3 cruzes erradas, escolhidas de entre 7 possibilidades.

*Assim, o número de apostas (simples) premiadas com o **5.º prémio** será* $N_1 = {}^3C_3 \times {}^7C_3 = 1 \times 35 = 35$.

<u>Para 4 acertos</u>:
*Raciocinando da mesma maneira, temos agora a situação: **C C C C E E E E E E***

*Para o **4.º prémio** será:* $N_2 = {}^4C_4 \times {}^6C_2 = 1 \times 15 = 15$.

*Para o **5.º prémio** será:* $N_3 = {}^4C_3 \times {}^6C_3 = 4 \times 20 = 80$ *.(Note que para o 5.º prémio apenas há 3 números certos em cada uma das apostas simples premiadas, ficando, portanto, um deles (dos quatro certos) de fora)*

2.

Como $p(A \mid B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$ *, substituindo os valores conhecidos, vem:*

$$0{,}25 = \frac{0{,}1}{p(B)} \Leftrightarrow p(B) = \frac{0{,}1}{0{,}25} \Leftrightarrow p(B) = 0{,}4 \ .$$

Por outro lado, como $p(AUB) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ *, substituindo os valores conhecidos, vem:*

$$0{,}8 = p(A) + 0{,}4 - 0{,}1 \Leftrightarrow p(A) = 0{,}5 \ .$$

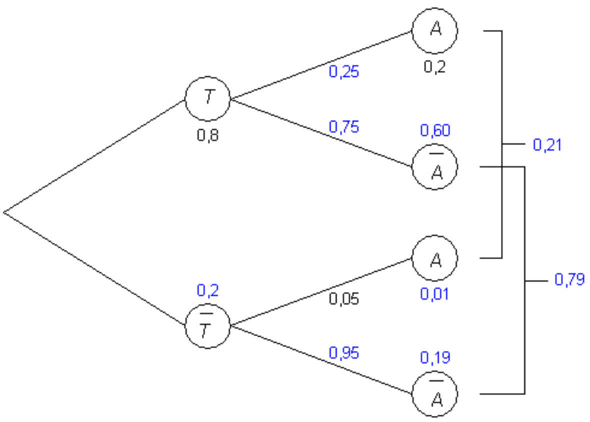
Dado que $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$ *, visto ser* $0{,}1 \neq 0{,}5 \times 0{,}4$ *, os acontecimentos A e B não são independentes.*

3.

Ora,

$$
\begin{aligned}
p(\overline{A}\cap\overline{B}) &= p(\overline{A\cup B}) && (Porquê\,?)\\
&= 1-p(A\cup B) && (Porquê\,?)\\
&= 1-(p(A)+p(B)-p(A\cap B)) && (Porquê\,?)\\
&= 1-p(A)-p(B)+p(B)\times p(A\,|\,B) && (Porquê\,?)\\
&= p(\overline{A})-p(B)+p(A\,|\,B)\times p(B) && (Porquê\,?)
\end{aligned}
$$

4.



a)

Ora, $p(A\,|\,T)=\dfrac{p(A\cap T)}{p(T)}=\dfrac{0{,}2}{0{,}8}=0{,}25$.

Portanto, é de 25% a probabilidade de ter chegado atrasado dado que veio de teleférico.

b)

Ora, $p(\overline{T}\cap A)=p(\overline{T})\times p(A\,|\,\overline{T})=(1-0{,}8)\times 0{,}05=0{,}01$.

Portanto, é de 1% a probabilidade de ter vindo de autocarro e ter chegado atrasado.

c)

Ora, $p(A)=p((T\cap A)\cup(\overline{T}\cap A))=p(T\cap A)+p(\overline{T}\cap A)=0{,}2+0{,}01=0{,}21$.

Portanto, é de 21% a probabilidade de ter chegado atrasado.

d)

Ora, $p(\overline{A})=1-p(A)=1-0{,}21=0{,}79$.

Portanto, é de 79% a probabilidade de não ter chegado atrasado.

e)

Ora, $p(\overline{T}\,|\,\overline{A})=\dfrac{p(\overline{T}\cap\overline{A})}{p(\overline{A})}=\dfrac{p(\overline{T})\times p(\overline{A}\,|\,\overline{T})}{0{,}79}=\dfrac{0{,}2\times(1-p(A\,|\,\overline{T})}{0{,}79}=\dfrac{0{,}2\times(1-0{,}05)}{0{,}79}=\dfrac{0{,}19}{0{,}79}\approx 0{,}24$.

Portanto, é de 24% a probabilidade de ter vindo de autocarro sabendo que chegou a horas.

5.

a)

Há duas maneiras para dispor o Às e o Rei (o Ás na ponta esquerda e o Rei na ponta direita; o Rei na ponta esquerda e o Ás na ponta direita). Para cada uma destas configurações, as restantes 5 cartas permutando entre si nos 5 lugares disponíveis entre as pontas, originam $P_5=5!=120$ *disposições diferentes.*

Logo, nas condições indicadas, podem ser feitas $2\times 5!=240$ *disposições diferentes.*

b)

Porque há mais configurações em que o Rei não fica ao lado da Dama do que configurações em que estas duas cartas ficam juntas, optamos por contar as disposições desfavoráveis.
Há seis posições na fila que garantem a possibilidade de estas duas cartas ficarem juntas (1-2, 2-3, ... , 6-7).
Para cada uma destas possibilidades, podemos permutar estas duas cartas de lugar e, para cada uma dessas configurações, as restantes 5 cartas podem permutar entre si nos 5 lugares disponíveis. Portanto, o número de disposições em que o Rei e a Dama ficam juntos é $N'=6\times 2!\times 5!=1440$.

Dado que o número de disposições das 7 cartas sem qualquer restrição é $P_7=7!=5040$ *, o número de disposições de acordo com o pedido é* $N=5040-1440=3600$.

(Há 15 disposições (5+4+3+2+1 - verifique) em que as duas cartas consideradas não ficam uma ao lado da outra. Logo, $N=15\times 2!\times 5!=3600$ *)*

c)

De acordo com a Regra de Laplace, a probabilidade de um acontecimento é igual ao quociente entre o número de casos favoráveis a esse acontecimento e o número de casos possíveis, quando estes são todos equiprováveis e em número finito (que é o caso).

Vejamos o número de casos possíveis: existem ${}^{15}C_{10}$ *maneiras diferentes de escolher dez, das quinze cartas, para dispor sobre a mesa; para cada uma destas maneiras, existem* $10!$ *maneiras diferentes de essas dez cartas ocuparem os dez lugares nessas duas filas de cinco cartas. Logo,* $NCP = {}^{15}C_{10} \times 10!$.

Vejamos agora o número de casos favoráveis: existem ${}^{8}C_5 \times {}^{7}C_5$ *maneiras diferentes de escolher cinco, das oito cartas de copas, e cinco, das sete cartas de paus, para dispor nas duas filas; para cada uma destas maneiras, existem* $2! \times 5! \times 5!$ *maneiras diferentes de essas cartas ocuparem as duas filas, de acordo com o enunciado (as de copas podem ficar numa fila e as de paus na outra, ou ao contrário; para cada uma destas duas maneiras, existem* $5!$ *maneiras diferentes de as cinco cartas de copas ocuparem os cinco lugares da sua fila e, de igual modo, existem* $5!$ *maneiras diferentes de as cinco cartas de paus ocuparem os cinco lugares da sua fila). Logo,* $NCF = {}^{8}C_5 \times {}^{7}C_5 \times 2! \times 5! \times 5!$.

Daí que a expressão $\dfrac{{}^{8}C_5 \times {}^{7}C_5 \times 2 \times 5! \times 5!}{{}^{15}C_{10} \times 10!}$ *traduz a probabilidade pedida.*

6.

a)

Há $7 \times 7 = 49$ *maneiras diferentes de retirar duas bolas, uma de cada caixa.*

Para que as bolas sejam da mesma cor, ou são ambas amarelas ou são ambas verdes. Há $2 \times 6 = 12$ *maneiras distintas de extrair 2 bolas verdes, uma de cada caixa; e* $5 \times 1 = 5$ *maneiras distintas de extrair 2 bolas amarelas, uma de cada caixa.*

Logo, a probabilidade pedida é $p = \dfrac{12+5}{49} = \dfrac{17}{49}$.

($p = p((V_A \cap V_B) \cup (A_A \cap A_B)) = p(V_A \cap V_B) + p(A_A \cap A_B) = p(V_A) \times p(V_B) + p(A_A) \times p(A_B) = \frac{2}{7} \times \frac{6}{7} + \frac{5}{7} \times \frac{1}{7} = \frac{17}{49}$ *) (Porquê)*

b)

A probabilidade de sair bola verde, se saiu face 1 no lançamento do dado, $p(Y \mid X)$*, é* $\dfrac{6}{7}$.

Como saiu face 1 no lançamento do dado, será extraída uma bola da caixa B (a bola só seria extraída da caixa A, se tivesse saído face par no lançamento do dado, o que não aconteceu). A caixa B contém sete bolas (seis verdes e uma amarela), pelo que a probabilidade de sair uma bola verde da caixa B é $\dfrac{6}{7}$.

---

(1) Os acontecimentos são independentes, pelo que $p(1) = \frac{1}{4}$.

(2) Ora, $(x^2 + x)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k (x^2)^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} {}^{n}C_k (x^2)^{n-k} x^k$.

Tendo em consideração o desenvolvimento do binómio de Newton, dado que o coeficiente do termo é 1, o termo ter-se-á obtido para $k = n$ (ou para $k = 0$, consoante a forma considerada para o desenvolvimento).

Assim, vem ${}^{n}C_n (x^2)^n x^{n-n} = 1 \times x^{2n} \times 1 = x^{2n}$ (ou ${}^{n}C_0 (x^2)^n x^0 = 1 \times x^{2n} \times 1 = x^{2n}$), pelo que $n = 10$.

(3) Em cada fila, os cavalos apenas podem ocupar duas das oito casas disponíveis, que podem ser escolhidas de ${}^{8}C_2$ maneiras. Como os cavalos são indistinguíveis, há exactamente o número anterior de maneiras de colocar os dois cavalos numa determinada fila. Ora como existem 8 filas, o número pedido é $8 \times {}^{8}C_2$.

(4) Ora, ${}^{n}C_3 = 27720$, ${}^{n}C_0 = 1$ e ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 + {}^{n}C_2 + {}^{n}C_3 = 29317 \Leftrightarrow {}^{n}C_2 + {}^{n}C_3 = 29317 - 1 - 27720 \Leftrightarrow {}^{n}C_2 + {}^{n}C_3 = 1596$.

Logo, ${}^{n+1}C_2 = {}^{n}C_2 + {}^{n}C_3 = 1596$. (Acompanhe este raciocínio com um esquema da localização dos elementos considerados no triângulo de Pascal)

(5) Existem $P_3 = 3!$ maneiras de ordenar os primeiros três classificados. Os quarto e quinto classificados podem ser escolhidos de ${}^{4}C_2$ maneiras diferentes, que originam ${}^{4}C_2 \times P_2$ maneiras diferentes de os ordenar. Logo, é possível ordenar os cinco primeiros classificados de $3! \times {}^{4}C_2 \times P_2 = 3! \times {}^{4}A_2$ formas diferentes.