Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Proposta de Resolução da Prova Escrita de Matemática

24/10/2003 **Turmas A e B - Provas 1 e 2** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ *N.º:* _____ *Turma:* ___

1.ª Parte

	$1^{(1)}$	$2^{(2)}$	$3^{(3)}$	$4^{(4)}$	$5^{(5)}$
Questão	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
Prova 1	**D**	**B**	**C**	**B**	**C**
Questão	*4*	*1*	*5*	*3*	*2*
Prova 2	**A**	**C**	**B**	**D**	**A**

2.ª Parte

1.

a)

Os resultados desta experiência são da forma (a, b) *com* $a, b = 1, 2, 3, 4$*, sendo, portanto, o conjunto de resultados (* Ω *) constituído por 16 elementos.*
O espaço de acontecimentos ($P(\Omega)$ *) é constituído por todos os subconjuntos de (* Ω *), isto é, pelos subconjuntos com zero elementos, com um elemento, com dois elementos, ... até 16 elementos, que são, respectivamente, nos seguintes números:* ${}^{16}C_0$, ${}^{16}C_1$, ${}^{16}C_2$, ... ${}^{16}C_{16}$.

Logo, $\# P(\Omega) = \sum_{k=0}^{16} {}^{16}C_k = (1+1)^{16} = 2^{16} = 65536$ *.(Tenha em consideração a fórmula do binómio de Newton)*

b)

Na forma de subconjunto de Ω*, o acontecimento A pode ser definido por* $A = \{(3, 4), (4, 3)\}$. *(porquê?)*

c)

Os conjuntos A e B podem ser definidos, por exemplo, pelas seguintes condições:
A*: "Sair um ponto no primeiro lançamento"*
B*: "Sair uma soma de pontos igual a seis"*

d)

Os acontecimentos B e C são incompatíveis, pois, de facto, $A \cap B = \varnothing$*. No entanto, eles não são contrários, pois, ainda que* $A \cap B = \varnothing$*; temos* $A \cup B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,4), (3,3), (4,2)\} \neq \Omega$.

2.

a)

A linha considerada é para $n = 8 - 1 = 7$ *e o elemento considerado, essa linha, tem ordem* $p = 3$.

Logo, $d = {}^{7}C_3 = \dfrac{7!}{3! \times 4!} = \dfrac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{3 \times 2 \times 1 \times 4!} = 35$.

b)

Utilizando a fórmula do binómio de Newton, temos:

$$\begin{aligned}
(2-x)^7 &= \sum_{k=0}^{7} {}^{7}C_k \times 2^k \times (-x)^{7-k} \\
&= {}^{7}C_0 \times 2^0 \times (-x)^7 + {}^{7}C_1 \times 2^1 \times (-x)^6 + {}^{7}C_2 \times 2^2 \times (-x)^5 + {}^{7}C_3 \times 2^3 \times (-x)^4 + {}^{7}C_4 \times 2^4 \times (-x)^3 + \\
&\quad + {}^{7}C_5 \times 2^5 \times (-x)^2 + {}^{7}C_6 \times 2^6 \times (-x)^1 + {}^{7}C_7 \times 2^7 \times (-x)^0 \\
&= 1 \times 1 \times (-x)^7 + 7 \times 2 \times (-x)^6 + 21 \times 4 \times (-x)^5 + 35 \times 8 \times (-x)^4 + 35 \times 16 \times (-x)^3 + 21 \times 32 \times (-x)^2 + 7 \times 64 \times (-x)^1 + 1 \times 128 \times 1 \\
&= -x^7 + 14x^6 - 84x^5 + 280x^4 - 560x^3 + 672x^2 - 448x + 128
\end{aligned}$$

3.

Designando por n o número de bolas amarelas, então 2n designa o número total de bolas na caixa.

Ora, a probabilidade considerada é $p = \frac{{}^{n}C_2}{{}^{2n}C_2} = 24\% = \frac{24}{100}$*, pois trata-se de contar conjuntos de 2 elementos, subconjuntos do conjunto das bolas da caixa, visto não interessar a ordem e não poder haver repetição, dado que as bolas são extraídas simultaneamente.*

Ora,

$$\frac{{}^{n}C_2}{{}^{2n}C_2} = \frac{\frac{n!}{2!\times(n-2)!}}{\frac{(2n)!}{2!\times(2n-2)!}} = \frac{\frac{n!}{(n-2)!}}{\frac{(2n)!}{(2n-2)!}} = \frac{n!\times(2n-2)!}{(2n)!\times(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)\times(n-2)!\times(2n-2)!}{(2n)\times(2n-1)\times(2n-2)!\times(n-2)!} = \frac{n\times(n-1)}{(2n)\times(2n-1)} = \frac{n-1}{2\times(2n-1)}$$

Logo, $p = \frac{24}{100} \Leftrightarrow \frac{n-1}{4n-2} = \frac{24}{100} \Leftrightarrow 100n - 100 = 96n - 48 \Leftrightarrow 4n = 52 \Leftrightarrow n = 13$*, pelo que existem 26 bolas na caixa, 13 amarelas e 13 verdes.*

<u>Uma alternativa</u>, poderá consistir em considerarmos que as duas bolas são extraídas uma a uma, sem reposição da primeira bola, e que as bolas são todas distintas.

Assim, temos: $NCP = (2n)\times(2n-1) = {}^{2n}A_2$ *e* $NCF = n\times(n-1) = {}^{n}A_2$.

Logo, $p = \frac{24}{100} \Leftrightarrow \frac{n\times(n-1)}{2n\times(2n-1)} = \frac{24}{100} \Leftrightarrow 100n - 100 = 96n - 48 \Leftrightarrow 4n = 52 \Leftrightarrow n = 13$*, pelo que existem 26 bolas na caixa, 13 amarelas e 13 verdes.*

4.

a)

As configurações do pódium distinguem-se quer pelo grupo das 3 atletas mais bem classificadas, quer pela ordem dos seus lugares na classificação geral. Assim, concluímos que interessa a ordem e não pode haver repetição. Trata-se, portanto, de contar ternos ordenados, constituídos por 3 elementos diferentes do conjunto das atletas.

Logo, pode haver $N_1 = 8\times7\times6 = {}^{8}A_3 = 336$ *configurações diferentes para o pódium.*

b)

Para que a atleta portuguesa parta entre as atletas francesas, a atleta portuguesa poderá partir em 6 pistas distintas: pista 2, pista 3, pista 4, pista 5, pista 6 ou pista 7. (faça um esquema, se tiver necessidade)

Vejamos o que se passa quando a atleta portuguesa parte na pista 2:

Há $2 = 2! = P_2 = {}^{2}A_2$ *maneiras distintas de as atletas francesas ocuparem as pistas 1 e 3.*

Há $120 = 5! = P_5 = {}^{5}A_5$ *maneiras distintas de as 5 atletas restantes (3 alemãs e 2 espanholas) ocuparem as restantes 5 pistas (pistas 4 a 8).*

Se analisarmos as outras 5 alternativas de ocupação da pista pela atleta portuguesa, concluímos facilmente os mesmos valores.

Logo, se a atleta portuguesa partir entre as atletas francesas, há $N_2 = {}^{6}C_1 \times P_2 \times P_5 = 6\times2\times120 = 1440$ *configurações possíveis no alinhamento de partida.*

c)

Já vimos que interessa a ordem e não pode haver repetição.

Ora, $NCP = {}^{8}A_8 = P_8 = 40320$ *e* $NCF = P_3 \times P_5 = 720$*, onde* $P_3 = {}^{3}A_3 = 6$ *é o número de maneiras distintas das atletas alemãs ocuparem as três primeiras pistas e* $P_5 = {}^{5}A_5 = 120$ *é o número de maneiras distintas de as restantes 5 atletas ocuparem as pistas 4 a 8.*

Logo, a probabilidade pedida é $p = \frac{3!\times5!}{8!} = \frac{6\times5!}{8\times7\times6\times5!} = \frac{1}{56}$.

5.

a)

Na mesma peça, pode haver repetição de figura, no entanto não interessa a ordem, pois a peça duque-terno e terno-duque, por exemplo, é única. Não há, portanto, uma técnica de contagem da combinatória que permita por si só efectuar a contagem pretendida.

Consideremos, por exemplo, a estratégia seguinte. Dividamos as 28 peças em dois grupo: G1, o grupo dos doble e G2, o grupo das restantes peças.

Ora, o número de peças do grupo G1 é $N_{G1} = {}^7C_1 = \frac{7!}{1! \times 6!} = 7$ *, pois basta contar os subconjuntos de um só elemento do conjunto das sete figuras. Quanto ao outro grupo,* $N_{G2} = {}^7C_2 = \frac{7!}{2! \times 5!} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$*, pois basta agora contar os subconjuntos de dois elementos do conjunto das sete figuras.*

Assim, está verificado que o dominó de sete figuras possui efectivamente $N_{G1} + N_{G2} = 7 + 21 = 28$ *peças.*

b)

Recorrendo à mesma estratégia, temos: $N' = N'_{G1} + N'_{G2} = {}^{10}C_1 + {}^{10}C_2 = 10 + \frac{10 \times 9 \times 8!}{2 \times 8!} = 10 + 45 = 55$.

Logo, um jogo de dominó com 10 figuras possui 55 peças.

6.

a)

Consideremos o conjunto $C_P = \{P_1, P_2, ..., P_{32}\}$ *das 32 casas pretas do tabuleiro.*

Ao considerarmos os arranjos sem repetição dos elementos de C_P *agrupados dois a dois, estamos a considerar todos os pares ordenados possíveis de criar com dois elementos distintos de* C_P*, por exemplo:* (P_1,P_2), (P_2, P_1), (P_4,P_{32}), (P_{32}, P_4)*, etc.*

Criada a sequência de todos esses pares ordenados, podemos agora fazer corresponder a peça preta ao primeiro elemento do par ordenado (uma determinada casa preta) e a peça branca ao segundo elemento do par (uma outra casa preta, distinta da anterior) - ou ao contrário, se preferir -, o que define inequivocamente todas as possibilidades diferentes de as duas peças consideradas ocuparem casas pretas do tabuleiro.

Ora, o número de pares ordenados considerados, em número de ${}^{32}A_2$ *, traduz exactamente o número de formas possíveis de colocar as duas peças por forma a ocuparem casa pretas.*

Se considerarmos agora todos os subconjuntos de C_P *com dois elementos, onde, por exemplo,* $\{P_1,P_2\}=\{P_2,P_1\}$ *é um desses subconjuntos, estamos a considerar todas as maneiras possíveis de seleccionar duas casas pretas do tabuleiro.*
Considerado um desses subconjuntos, isto é consideradas duas casas pretas do tabuleiro, temos agora duas maneiras diferentes de colocar as duas peças: a branca numa das casas e a preta na outra, ou ao contrário.
Portanto, a cada subconjunto de C_P *com dois elementos corresponde 2 maneiras distintas de colocar as peças.*
Logo, o número de formas possíveis de colocar as duas peças por forma a ocuparem casa pretas pode ser expresso por $2 \times {}^{32}C_2$.

b)

Ora, para cada encontro de dois jogadores realizaram-se duas partidas: o jogador A joga com as brancas e o B com as pretas, depois o A joga com as pretas e o B com as brancas.

O número de encontros entre esses 15 jogadores é dado por ${}^{15}C_2$ *, pois trata-se de contar os subconjuntos de dois elementos possíveis de criar de um conjunto de 15 elementos.*

Logo, foram realizadas $N = 2 \times {}^{15}C_2 = 2 \times \frac{15 \times 14 \times 13!}{2! \times 13 \times} = 210$ *partidas.*

7.

a)

Contabilizemos primeiro o número de sequências distintas que podem ocorrer em cada um dos grupos: G1, G2 e G3, considerados da esquerda para direita.

Ora,

- $N_{G1} = {}^{23}A'_2$ *; neste grupo temos sequências ordenadas de duas letras (com repetição), que são escolhidas de um conjunto de 23 letras.*
- $N_{G2} = {}^{3}C_1 \times {}^{23}A_1 \times {}^{10}A'_2$ *; neste grupo temos 3 maneiras distintas para escolher a posição onde colocar a letra, que pode agora ser escolhida de 23 maneiras distintas. Quanto às duas posições ainda livres, são preenchidas com 2 algarismos de um grupo de 10, podendo haver repetição do algarismo.*
- $N_{G3} = {}^{10}A_1$ *; neste grupo temos sequências de 1 elemento escolhido de um conjunto de 10 elementos.*

Ora, pela lei do produto, vem $N = N_{G1} \times N_{G2} \times N_{G3} = (23^2) \times (3 \times 23 \times 10^2) \times (10) = 36.501.000$.

Portanto, o sistema comporta 36.501.000 matrículas distintas.

b)

Em vez de contar os casos favoráveis (ver tabela a seguir) é preferível contar os casos desfavoráveis, que correspondem às matrículas onde figuram exactamente 3 zeros, e que são do tipo:

?? – 0?0 - 0

Ora, $D = ({}^{23}A'_2) \times ({}^{3}C_1 \times 23 \times 1 \times 1) \times (1) = 23^2 \times 3 \times 23 = 3 \times 23^3 = 36501$ *, logo* $NCF = 36464499$.

Logo, a probabilidade pedida é $p = 1 - \frac{36501}{36501000} = 1 - \frac{1}{1000} = \frac{999}{1000}$.

Sumariamente, contar os casos favoráveis é contar os casos correspondentes a:

0 zeros	**1 zero**		**2 zeros**	
-	Ou em G2	Ou em G3	Ou ambos em G2	Ou 1 em G2 e 1 em G3
$23^2 \times 3 \times 23 \times 9^2 \times 9$	$23^2 \times 3 \times 23 \times 2 \times 9 \times 1 \times 9$	$23^2 \times 3 \times 23 \times 9^2 \times 1$	$23^2 \times 3 \times 23 \times 1^2 \times 9$	$23^2 \times 3 \times 23 \times 2 \times 9 \times 1 \times 1$
26.609.229	5.913.162	2.956.581	328.509	657.018
			TOTAL	**36.464.499**

FIM

(1) Quaisquer 3 vértices de um cubo são não colineares, logo definem um plano.

(2) Se a soma dos dois primeiros elementos de uma linha do triângulo de Pascal é 23, então o segundo elemento é 22 visto que o primeiro elemento de cada linha é 1 (a). Dada a simetria existente em qualquer linha do triângulo de Pascal (2), então o penúltimo e último elementos dessa linha são, respectivamente, 22 e 1. Dado que ${}^{n}C_0 + {}^{n}C_1 = {}^{n+1}C_1$, então o segundo elemento da linha seguinte é 23, sendo o primeiro elemento da linha 1 (por (a)). Logo, por (2), os último e penúltimo elementos desta linha são 1 e 23, respectivamente. Consequentemente o seu produto é 23.

(3) Sendo $p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = p(6) = p$ e $p(1) = 3 \times p(2) = 3p$, dado que $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$ resulta $3p + 5p = 1 \Leftrightarrow p = \frac{1}{8}$. Logo, $p(1) = \frac{3}{8}$.

(4) Os casos favoráveis são os conjuntos de 5 elementos, subconjuntos do conjunto das restantes 20 questões não analisadas pelo aluno.

(5) Ora, sendo $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, então $A \cup B = \{1, 2, 3, 5\}$. Logo, $\overline{A \cup B} = \{4\}$, pois $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.