Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

22/03/2000 ***Limites, assimptotas, continuidade e derivadas*** **12.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

1. Considere as funções *f* e *g*, tais que:

- *f* e *g* são funções contínuas em $[a, b]$
- $f(a) < g(a)$ e $g(b) < f(b)$

Mostre que existe pelo menos um número $c \in \rfloor a, b \lfloor$ tal que $f(c) = g(c)$.

Sugestão: Considere $f(x) - h(x) = h(x)$

2. Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{1 - e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^8}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^{x+1} - 5}{2x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left[(x+1)^2\right]}{2x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log\left[(x+1)^2\right]}{2x}$ **g)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x^3}{3x - 3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(-2x)}{x}$

3. Supondo que $\lim\limits_{x \to c} f(x) = 0$ e que $\lim\limits_{x \to c} \left[f(x) \times g(x)\right] = 1$

a) Mostre que $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ não existe.

b) Encontre duas funções *f* e *g* que satisfaçam as condições referidas para, por exemplo, $c = 3$.

4. Considere a função *f* assim definida: $f(x) = \begin{cases} 3 - x & \Leftarrow \quad x < 1 \\ \frac{x}{2} + 1 & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$

a) Represente *f* graficamente.

b) Determine, se existir: $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$.

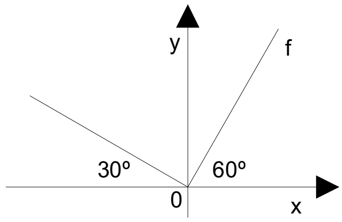
c) Determine, se existir: $\lim\limits_{x \to 0{,}99} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1{,}0001} f(x)$ e $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

5. Cada um dos seguintes limites representa a derivada de uma função *f* real de variável real num ponto *c*.
Caracterize uma possível função *f* e diga qual é *c*:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{9 + h} - 3}{h}$.

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-(3 + h)^3 + 27}{h}$

6. Considere a função de domínio *IR* representada graficamente:



a) Defina *f* algebricamente.

b) Represente, graficamente, a função *f´*, derivada da função *f*.

7. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$f(x) = 1 - e^x$; $g(x) = -3^x$ e $h(x) = \ln x$

a) Determine uma equação da recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa nula e que contém esse ponto.

b) Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa nula e (com) o eixo das abcissas.

c) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico da função *h*, no ponto de abcissa 1.

8. Considere as fórmulas da área do círculo de raio *r*, $A = \pi . r^2$, e do volume da esfera de raio *r*, $V = \frac{4}{3} . \pi . r^3$.

a) Determine $\frac{dA}{dr}$. Qual é o seu significado geométrico.

b) Determine $\frac{dV}{dr}$. Qual é o seu significado geométrico.

9. A lei de Boyle-Mariotte estabelece que mantendo constante a temperatura, a pressão *P* e o volume *V* de um gás estão inversamente relacionados, sendo $PV = k$, $k =$ constante.

a) Supondo que se mantém constante a temperatura, uma dada quantidade de gás é livre de se expandir. Calcule a taxa de variação da pressão com respeito ao volume.

b) A uma pressão de 3 atmosferas uma certa quantidade de gás ocupa o volume de 12 centímetros cúbicos. Suponha que a temperatura se mantém constante.

b1) Se a pressão aumenta o volume aumenta ou diminiu?

b2) Se a pressão aumenta à taxa de variação de 0,04 atm/min, determine a taxa de variação do volume em que a pressão é de 30 atmosferas.

10. O raio de um balão esférico aumenta 2 cm/s.

Qual é a taxa de variação a que o ar está a ser soprado para dentro do balão no momento em que o raio é de 20 centímetros?

11. Um objecto metálico é colocado numa panela com água à temperatura de 100º C.
Suponha que a temperatura da água se mantém constante.

Para $t = 30$ s, a temperatura *T* do objecto é 50º C e esta aumenta instantaneamente (nesse momento) na razão de 2º C por segundo.

Determine a e b (reais), sabendo que a temperatura *T* do objecto em função do tempo *t*, em segundos, é dada por $T(t) = 100 - a \times e^{-b \times t}$.

12. Para comparar a acidez de diferentes soluções, os químicos usam o pH.
O pH é definido em termos de concentração, *x*, de iões de hidrogénio numa solução como: $pH = -\log x$.

Calcule a taxa de variação de pH com respeito à concentração de iões de hidrogénio quando pH é 3.

13. Faça uma conjectura para a derivada de ordem n, $n \in N$, de cada uma das seguintes funções e, em seguida, use o método de indução matemática para provar a sua hipótese.

a) $f(x) = \ln x$

b) $f(x) = x.e^x$

14. Demonstre que se uma função definida em IR é derivável e é par, então a sua derivada é uma função ímpar; se for ímpar, então a sua derivada é uma função par.
Isto é:

a) Se $f : IR \to IR$ é uma função derivável tal que $f(x) = f(-x), \forall x \in IR$, então $f'(x) = -f'(-x), \forall x \in IR$.

b) Se $f : IR \to IR$ é uma função derivável tal que $f(x) = -f(-x), \forall x \in IR$, então $f'(x) = f'(-x), \forall x \in IR$.

Nota: Tenha em consideração a derivada da função composta.
Considere $y = f(u)$, com $u = g(x) = -x$.

15. Considere a função real de variável real $f(x) = e^{\frac{x+1}{x-1}}$.

a) Faça o estudo analítico completo da função.

b) Confirme as respostas fazendo o gráfico com a calculadora ou o *Graphmatica*.
Confirme a resolução algébrica usando o *Derive*.

16. Considere a função real de variável real $f(x) = \begin{cases} \ln(e^x - 1) & \Leftarrow \quad x > 0 \\ e^{-x^2} & \Leftarrow \quad x \le 0 \end{cases}$

a) Faça o estudo analítico completo da função.

Nota: Na determinação das assimptotas tenha em consideração que $e^x - 1 = e^x(1 - \frac{1}{e^x})$

b) Confirme as respostas fazendo o gráfico com a calculadora ou o *Graphmatica*.
Confirme a resolução algébrica usando o *Derive*.

SOLUÇÕES

1.

2.

a) $-\infty$

b) 1/2

c) $+\infty$

d) $\frac{5 \times \ln 5}{2}$

e) 1

f) $\frac{1}{\ln 10}$

g) 1

h) $+\infty$

4.

b) 2; 2; 2.

c) 2,01; 1,50005; não existe.

5.

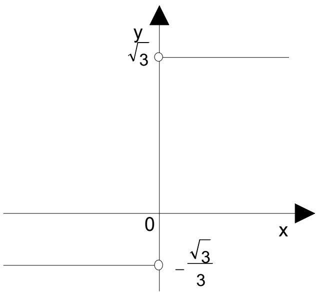
b) $f(x) = \sqrt{x}$ e $c = 9$ (p.e.)

c) $f(x) = -x^3$ e $c = 3$ (p.e.)

6.

a) $f(x)=\begin{cases}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}x & \Leftarrow \quad x<0 \\ \sqrt{3}.x & \Leftarrow \quad x\geq 0\end{cases}.$

b)



7.

a) $y=x$

b) $(\frac{-1}{\ln 3},0)$

c) $y=x-1$

9.

a) $P'=-\frac{k}{V^2}$.

b1) $V=\frac{36}{P}$. Se a pressão aumenta o volume diminui.

b2) $-0{,}0016\ cm^3/min$

10. $3200\pi\ cm^3/s$

11. $a=50\times e^{\frac{6}{5}}$; $b=\frac{1}{25}$

12. $-\frac{1000}{\ln 10}$

13.

a) $f^{(n)}(x)=(-1)^{n+1}\frac{(n-1)!}{x^n}$

b) $f^{(n)}(x)=(n+x).e^x$

Note que $f^{(n)}$ designa a derivada de ordem *n* de *f*

15.

A função tem domínio $IR\setminus\{1\}$, não tem zeros e o seu gráfico intersecta o eixo dos yy no ponto de ordenada $y=\frac{1}{e}$. A função não é par, nem é ímpar.

A função é contínua (no seu domínio).
O gráfico da função admite uma assimptota vertical unilateral (à direita) de equação $x=1$ e outra horizontal bilateral de equação $y=e$.

A função é decrescente em $]-\infty,1[$ e em $]1,+\infty[$ e não tem extremos ($f'(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}.e^{\frac{x+1}{x-1}}$).

O ponto P (0, $\frac{1}{e}$) é o único ponto de inflexão e a concavidade do gráfico da função é voltada para baixo no intervalo $]-\infty,0[$, voltada para cima no intervalo $]0,1[$, quer em $]1,+\infty[$

($f''(x)=e^{\frac{x+1}{x-1}}.\frac{4x}{(x-1)^4}$).

16.

A função tem domínio *IR* e apenas um zero: $x=\ln 2$. O gráfico da função intersecta o eixo dos *yy* no ponto de coordenadas (0, 1). A função não é ímpar nem é par.
A função é contínua em cada troço; não é contínua em zero, mas é contínua à esquerda.
O gráfico da função admite uma assimptota vertical unilateral (à direita) de equação $x=0$ e outra horizontal (só em torno de $-\infty$) de equação $y=0$.
Existe ainda uma assimptota oblíqua em torno de $+\infty$, que tem por equação $y=x$.

A função é crescente em IR^- e crescente em IR^+ , mas não é crescente em IR. $f(0)=1$ é um máximo relativo ($f'(0^-)=0^+$ e $f'(0^+)=-\infty$).

($f'(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x}{e^x-1} & \Leftarrow \quad x>0 \\ -2x.e^{-x^2} & \Leftarrow \quad x<0\end{cases}$)

O gráfico da função tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty,-\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$; voltada para baixo em $\left]-\frac{\sqrt{2}}{2},0\right[$ e em IR^+ . O ponto de inflexão tem coordenadas ($-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{e}}{e}$).

($f''(x)=\begin{cases}-\dfrac{e^x}{(e^x-1)^2} & \Leftarrow \quad x>0 \\ (4x^2-2).e^{-x^2} & \Leftarrow \quad x<0\end{cases}$).

O Professor