Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

29/11/99 ***A demonstração; Método de Indução Matemática*** **12.º Ano**

Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

Método de indução matemática

A indução matemática é um método de demonstração que pose ser usado quando queremos mostrar que uma certa propriedade A é válida para o conjunto N dos números naturais. É constituída por duas fases:

1.ª Mostrar que a propriedade é válida para $n = 1$, ou seja, que A(1) é verdadeira.

2.ª Mostrar que se a propriedade é válida para um número *p* então é válida para $p + 1$, ou seja, que $A(p) \Rightarrow A(p+1)$.

Nota: Não é obrigatório começar com $n = 1$. Se na primeira fase começarmos por um número inteiro *b*, demostramos que a propriedade é válida para os inteiros desde *b* até $+\infty$.

Exemplo

Observemos as várias linhas do triângulo de Pascal.

A que é igual a soma em cada uma das suas linhas?

	Soma dos números
Linha 0	1
Linha 1	2
Linha 2	4
Linha 3	8
...	...

Vejamos ao lado uma tabela com as somas pedidas.
Para estes primeiros casos não há dúvidas que a soma de uma linha qualquer *n* é 2^n. Mas isto será sempre verdade? Embora tenhamos quase a certeza, é necessário demonstrá-lo.

Para isso vamos utilizar um método de demonstração chamado **método de indução**.

Vamos então fazer a demonstração de que a soma S_n dos números de cada linha *n* do triângulo de Pascal é 2^n.

1) Para $n = 1$ é verdadeira porque $S_1 = 1 + 1 = 2 = 2^1$.

2) Vamos admitir que $S_p = 2^p$ e queremos mostrar que $S_{p+1} = 2^{p+1}$.

Sabemos que S_p é a soma de todas as combinações possíveis de *p* objectos. Quando acrescentamos mais um objecto, as combinações possíveis de fazer a partir do novo conjunto são todas as que já havia antes com os objectos anteriores (e que eram em número de 2^p) mais as combinações em que entra o novo objecto. Ora estas novas combinações são todas as anteriores a que se junta o novo objecto, logo são também em número de 2^p. Logo:

$$S_{p+1} = 2^p + 2^p = 2 \times 2^p = 2^{p+1} \text{, c.q.d.}$$

Portanto, por 1) e 2), $S_n = 2^n \;, \forall n \in N$.

Exercícios

1. Mostre, por indução matemática, que a soma dos números naturais até *n* é $\frac{n^2+n}{2}$.

Isto é, que $S(n)=\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+...+n = \frac{n^2+n}{2}$.

2. Mostre por indução que o número de diagonais ***D*** de um polígono de *n* lados é dado por $D(n)=\frac{n\cdot(n-3)}{2}$.

3. Mostre, por indução matemática, que quando *n* pessoas se encontram e se cumprimentam, o número de apertos de mão é dado por $\frac{n(n-1)}{2}$.

4. Mostre, por indução, que a soma dos primeiros *n* números ímpares é igual a n^2.

Ou seja, que $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=n^2$.

5. Mostre, por indução, que a soma dos primeiros *n* números pares é igual a n^2+n.

Ou seja, que $\sum_{k=1}^{n}2k=n^2+n$.

6. Mostre, por indução, que qualquer que seja o número natural n, n^3+2n é divisível por 3.

7. Considere a soma dos quadrados perfeitos: $1+4+9+16+25+...$

Mostre, por indução, que a soma das primeiras n parcelas é igual a $\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

Ou seja, que. $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$.

8. A partir dos dois primeiros termos do desenvolvimento de . $(1+a)^n$ e sabendo que $a>0$, prove que $(1+a)^n \geq 1+na$.

9. Sabendo que $f(x+2)=x^4$, prove que $f(x)=x^4-8x^3+24x^2-32x+16$.

Sugestão: Considere $y=x+2$.

O Professor