

Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Livro de Texto, página 53, 2.º Volume

05/05/99

12.º Ano

5. A equação de um movimento vibratório simples é $e(t) = 3 \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{0,2}$, em que e é a elongação em t segundos.

- Mostre que a função é periódica e determine o período.
- Calcule $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(t)}{t}$.
- Calcule os valores de t em que a velocidade é máxima e $0 < t < 1$, em segundos.

Resolução

a) Ora, $e(t+T) = 3 \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot (t+T)}{0,2} = 3 \cdot \text{sen} \left(\frac{2\pi \cdot t}{0,2} + 10\pi T \right)$.

Para que e seja periódica terá de ser $e(t+T) = e(t), \forall t \in D_t$. Logo, terá de ser $10\pi T = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Daí, o período positivo mínimo é tal que $10\pi T = 2\pi \Leftrightarrow T = \frac{1}{5} \Leftrightarrow T = 0,2$ (segundos).

b) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{3 \cdot \text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{0,2}}{t} = 3 \times \frac{2\pi}{0,2} \times \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{2\pi \cdot t}{0,2}}{\frac{2\pi \cdot t}{0,2}} = 30\pi \times 1 = 30\pi$.

c) Ora, $v(t) = e'(t) = 3 \times \frac{2\pi}{0,2} \times \cos \frac{2\pi \cdot t}{0,2} = 30\pi \cdot \cos(10\pi \cdot t)$ e, portanto, $v'(t) = e''(t) = -300\pi^2 \cdot \text{sen}(10\pi \cdot t)$

Estas funções são também contínuas e têm o mesmo período positivo mínimo que e . Abordaremos apenas, portanto, a variação de v no intervalo $]0; 0,2[$.

Determinemos, entretanto, os zeros de v' :

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow 10\pi \cdot t = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{k}{10}, k \in \mathbb{Z}$$

t	0		0,1		0,2
$v'(t)$		-	0	+	0
$v(t)$		↘	Mín	↗	Máx

Portanto, os instantes procurados são: 0,2; 0,4; 0,6 e 0,8 segundos.

6. Seja $f(x) = x \cdot \cos(2x)$, de domínio $\left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[$.

- Mostre que $f''(x) = -4[\text{sen}(2x) + x \cdot \cos(2x)]$;
- Estude o sentido da concavidade do gráfico e averigüe se existe algum ponto de inflexão.

Resolução

a) Como, $f'(x) = \cos(2x) + x \cdot 2 \cdot (-\text{sen}(2x)) = \cos(2x) - 2x \cdot \text{sen}(2x)$

então, $f''(x) = -2\text{sen}(2x) - 2x \cdot 2 \cdot \cos(2x) - 2 \cdot \text{sen}(2x) = -4[\text{sen}(2x) + x \cdot \cos(2x)]$.

- b) Como será complicado avaliar analiticamente o sinal de f'' , assim como determinar os seus eventuais zeros, procuremos outra estratégia:

x	$-\pi/4$		0		$+\pi/4$
$\text{sen}(2x)$		-	0	+	
x		-	0	+	
$\cos(2x)$		+	1	+	
$\text{sen}(2x) + x \cdot \cos(2x)$		-	0	+	
$f''(x)$		+	0	-	
$f(x)$		∪	PI	∩	

A concavidade do gráfico de f é voltada para cima em $\left] -\pi/4, 0 \right[$ e voltada para baixo em $\left] 0, -\pi/4 \right[$. O ponto de coordenadas $(0, 0)$ é um ponto de inflexão do gráfico da função.

7. Seja $g(t) = 1 - \cos(2t) + \text{sent } t$.

- a) Determine os zeros de g .
 b) Mostre que $-1/8$ é o mínimo de g em $]-\pi/2, \pi/2[$.

Resolução

a)

$$g(t) = 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 t + \text{sent } t + \text{sent } t = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot \text{sent } t + \text{sent } t = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sent } t \cdot (2 \text{sent } t + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{sent } t = 0 \vee \text{sent } t = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow t = k\pi \vee t = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee t = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

b) Ora, $g'(t) = 2 \cdot \text{sen}(2t) + \text{cost} = 4 \cdot \text{sent } t \cdot \text{cost} + \text{cost} = \text{cost} \cdot (4 \text{sent } t + 1)$. Logo:

x	$-\pi/2$		$-\text{SIN}^{-1} \frac{1}{4}$		$+\pi/2$
cost		+	+	+	
$4 \cdot \text{sent } t + 1$		-	0	+	
$g'(t)$		-	0	+	
$g(t)$		↘	-0,125	↗	

O valor mínimo, $-0,125$, pode ser obtido se usar a calculadora: O minimizante é o valor de t tal que $\text{sent } t = -\frac{1}{4}$. Por outro lado, já vimos que $g(t) = 2 \cdot \text{sen}^2 t + \text{sent } t$. Logo, o mínimo será $2 \times (-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{8}$.

8. Seja $f(x) = -2x + \cos x$.

- a) Averigüe se o gráfico de f tem assíntotas oblíquas.
 b) Mostre, geometricamente e algebricamente, que a equação $\cos x = 2x$ tem uma e uma só raiz em $[0, \pi/4]$.

Resolução

a) $m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x + \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2 + \frac{\cos x}{x}) = -2$
 $b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) + 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (-2x + \cos x + 2x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \cos x$. Não existe este limite.

Portanto, o gráfico de f não admite qualquer assíntota oblíqua.

b) Ora, $\cos x = 2x \Leftrightarrow f(x) = 0$. Como f é uma função contínua em \mathbb{R} , $f(0) = 1$ e $f(\frac{\pi}{4}) = -\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, então, de acordo com o teorema de Bolzano, f admite **pelo menos um** zero no intervalo considerado.

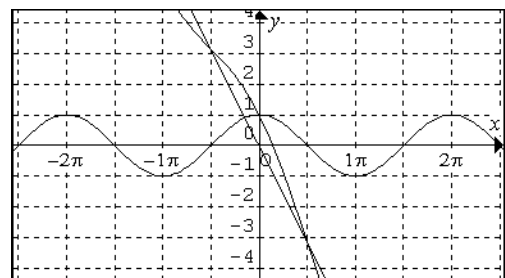
Vamos agora tentar mostrar que esse zero **é único** no intervalo considerado.

Ora, $f'(x) = -2 - \text{sen } x < 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Isto permite concluir que a **função contínua f é estritamente decrescente no intervalo considerado**.

Logo, nesse intervalo, caso anule, não pode anular mais do que uma vez.

Assim, podemos concluir que a equação dada tem uma e uma só raiz no intervalo considerado.

Geometricamente, basta considerar f como a soma de duas funções: $g(x) = -2x$ e $h(x) = \cos x$, suficientemente familiares.



UMA PERGUNTA: Por que é que o efeito ondulante provocado pela função h não invalida a monotonia de f em \mathbb{R} ? Sendo g uma função afim, quando é que o efeito ondulante de h invalida a monotonia de essa nova função f ?

O Professor