Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

03/05/99 ***A sucessão*** $n \to (1+\frac{1}{n})^n$ ***. Logaritmos e número de Neper*** **12.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

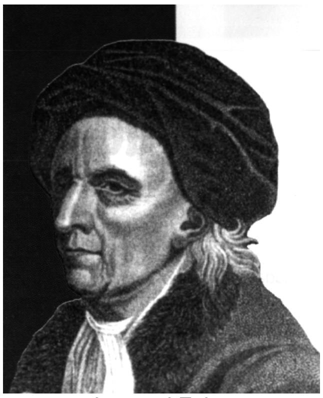
1. Diz-se que há «*juro composto*» quando o juro ganho por certo capital, ao fim de um período de tempo, fica depositado, acrescentando o capital inicial e passando, portanto, a ganhar juro. O investidor, no fim do segundo período de tempo, receberá, portanto, «*juro do juro*» além do juro do capital inicial.

Uma pessoa coloca 3000 contos a prazo, à taxa de 20% ao ano e não levanta dinheiro algum durante 10 anos.

a) Quanto tem a receber (capital acumulado) ao fim desse período?

b) E ao fim de *x* anos?

c) Generalizando o problema, prove que um capital *C*, à taxa de *r*%, e com juro composto, dá uma quantia total, ao fim de *n* anos de $T = C \times (1+\frac{r}{100})^n$.



Leonard Euler
1707 - 1783

LEONARD EULER

Nasceu em Basileia, Suiça, o mais prolífico de todos os matemáticos, e é considerado um dos pilares da história da matemática. Foi o grande *leader* em Matemática e Física teóricas, do século XVIII, que influenciou muitas gerações de matemáticos. Euler foi um dos mais férteis escritores matemáticos de sempre. Para além de ter tido 13 filhos, publicou mais de 500 obras originais em vida, além de cerca de 400 que só apareceram postumamente. Diz-se que a média da produção de Euler foi de 800 páginas por ano! O seu poder de concentração e a sua força de vontade eram espantosos. Felizmente tinha a capacidade de trabalhar rodeado pelo bulício das crianças e conta-se que podia escrever com um bébé ao colo e um gato no ombro...

Dotado de memória e de capacidade de trabalho espantosas, apesar de aos 29 anos perder um olho e de ter cegado completamente aos 60 anos, continuou a ditar as suas descobertas a dois dos seus filhos, conseguindo não quebrar o ritmo de produtividade.
Como se disse foram muito diversificados os temas que desenvolveu: Análise e Cálculo diferencial (1748-1755); Cálculo integral (1768-1770); Cálculo de variações (1744); Movimento dos planetas (1744) e da Lua (1753). E ainda Geometria, Topologia, Mecânica, Física, Astronomia e Ciências Náuticas!
Introduziu muitos dos símbolos matemáticos que ainda hoje usamos: *i* para $\sqrt{-1}$; $\sum$ para somatório; $f(x)$ para funções.
Euler designou por *e* o número irracional 2, 7182818284... limite da sucessão $(1+\frac{1}{n})^n$.
Esta designação conserva-se como homenagem a este matemático, embora o número seja chamado «número de Neper».
O número *e* surge nas mais inesperadas aplicações da Matemática. Como π , é um número irracional mas duma categoria diferente de $\sqrt{2}$: enquanto $\sqrt{2}$ pode ser raiz de um polinómio, o número *e* não pode ser raiz de polinómio de coeficientes inteiros: diz-se um irracional **transcendente**.

LOGARITMOS E HISTÓRIA

A invenção dos logaritmos deu um impulso decisivo ao desenvolvimento do Cálculo. A ideia central consiste em substituir produtos por somas; para se avaliar como isto era importante antes da existência de máquinas de calcular, efectue-se 592×847 , à mão, e compare-se com o trabalho de efectuar $592 + 847$ ...

> LOGARITMO
> Palavra inventada por John Napier, no início do século XVII, a partir de palavras gregas:
> λογοσ, logos (razão)
> αριθμο, aritmo (número)

Até ao século XVI houve, quando muito, algumas tentativas isoladas e pouco significativas para coordenar progressões aritméticas e geométricas. É importante compreender porque é que estas progressões se relacionam com o objectivo acima citado:

Progressão aritmética:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Progressão geométrica:

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}	2^{11}	2^{12}

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

$$\begin{array}{ccccc} 32 & \times & 128 & = & ? \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 5 & + & 7 & = & 12 \end{array}$$

Logo, $32 \times 128 = 4096$.
Analogamente:
$2048 \div 64 \to 11 - 6 = 5 \to 32$
Logo, $2048 \div 64 = 32$.
Para multiplicar números da segunda linha, basta somar os parceiros da primeira. Para dividir números da segunda linha, basta subtrair os parceiros da primeira.
No final do século XVI, o desenvolvimento do comércio e da banca, assim como os progressos da navegação e da astronomia, conduzem a problemas de cálculo numérico que exigem dos matemáticos a procura de técnicas simplificadoras.

John Napier

Foi então que o lorde scocês John Napier (lê-se e escreve-se em geral Neper), homem muito culto e conhecedor das matemáticas da época, meteu ombros ao trabalho de procurar um sistema que facilitasse a multiplicação de senos, mais tarde estendido a quaisquer números.

Neper
1550 - 1617

Trabalhou mais de 20 anos neste projecto e quando, em 1614 (três anos antes da sua morte) publicou a sua "Descrição da maravilhosa regra de logaritmos" causou grande surpresa e entusiasmo no mundo matemático. Napier escreveu ainda outra obra sobre Regras para a Construção de Tabelas, que só foi publicada em 1619 após a sua morte.
A obra de Napier envolvia implicitamente o número que hoje se designa por *e*, embora o autor não pudesse avaliar a importância que este número viria a ter. O «logaritmo Neperiano» original não é o mesmo que o nosso «logaritmo natural»; o primeiro relaciona-se com a base e^{-1} e o segundo usa base e. Apesar disso este número é designado por «número de Neper» e os logaritmos de base e são chamados hoje «logaritmos neperianos».

Henry Briggs
Henry Briggs, então professor de Geometria no Gresham College de Londres, foi o primeiro a entusiasmar-se com o trabalho de Napier. No verão de 1615, Briggs viajou até Edimburgo, onde foi hóspede de Napier durante um mês. Aí reflectiram ambos sobre a possibilidade de usar outras bases, uma vez que o sistema escolhido era complicado e nem satisfazia o próprio autor.
Briggs entendia que era preferível usar a base 10, ou seja, a função $y = 10^x$, para obter a relação entre produtos e somas: $y_1 = 10^{x_1}$ e $y_2 = 10^{x_2} \Rightarrow y_1 y_2 = 10^{x_1 + x_2}$. Assim, sem os factores intermédios que Napier usava, transformava a soma dos objectos no produto das imagens.
As tabelas de Napier, pela sua dificuldade, caíram rapidamente em desuso, embora ele seja considerado, sem contestação, como o inventor dos logaritmos. Depois da morte de Napier, Briggs levou por diante a ideia de construir uma tabela de logaritmos na base 10, a qual publicou em 1624.
Kepler interessou-se pela descoberta e utilizou logaritmos nos seus cálculos sobre o movimento dos astros.
Nasciam assim os «logaritmos decimais» que provocaram uma revolução nos cálculos em Matemática, Física, Astronomia, Náutica...
O seu uso permanece até aos nossos dias, pois continuam a ser muito usados em Matemática aplicada. Repare-se nas teclas da calculadora: A tecla **log** fornece directamente logaritmos decimais, a par de tecla **ln** que fornece logaritmos naturais.

A Base e
Em 1618, num apêndice duma tradução inglesa da obra de Napier surge a afirmação de que (em notação actual) $\log_e 10 = 2{,}302584$ o que mostra que a base e já era utilizada.
Em 1620 John Sheidell publicou "New logarithmes" usando também esta base. Mas os logaritmos naturais, embora como vemos, tenham aparecido ao mesmo tempo que as descobertas de Napier e de Briggs, teriam de esperar mais de um século até que se revelassem as extraordinárias propriedades do número que hoje designamos por e em homenagem a Euler. O que só veio a acontecer com o desenvolvimento do Cálculo Infinitesimal.

A Expansão
O mérito da descoberta de Napier e dos trabalhos de Briggs começou logo a ser reconhecido na Europa Continental: Kepler (1624) e Wigate (Paris 1625) publicam artigos sobre logaritmos e Vlack, Holanda, acrescenta as tabelas de Briggs até 90.000.
Em meados do século XVII o ensino dos logaritmos desce às escolas, surgindo em muitos livros de texto. E em 1721 ensinam-se logaritmos em Pequim, na China!

Tábuas de Logaritmos – O Declínio
Na segunda metade do século XX o uso de tabelas de logaritmos, para efectuar cálculos, decaiu rapidamente pela espectacular divulgação do computador e das calculadoras de bolso.
Mas a importância do Cálculo Logarítmico permanece, não só porque está na base da programação dessas máquinas, como nos cálculos relativos a situações que envolvem a função exponencial (e a sua inversa).

A Função Exponencial
A função exponencial é de enorme importância nas aplicações da Matemática aos mais variados campos do saber: ciências físico-químicas, biológicas, económicas, agronómicas, geográficas, médicas, sociais... recorrem à função exponencial para interpretar ou «modelizar» fenómenos da sua especialidade.
Inúmeros seres vivos, animais ou vegetais desenvolvem-se segundo leis exponenciais quando o meio ambiente é favorável.

(*Adaptado de XEQMAT, Matemática 12.º Ano, Editorial O Livro*)

2. Não é fácil intuir qual vai ser o comportamento da sucessão de termo geral $(1+\frac{1}{n})^n$, quando $n \to +\infty$, porque a base decresce e o expoente cresce... Comecemos então por a comparar com sucessões mais acessíveis.

Complete e prolongue o estudo até esgotar a capacidade da calculadora...

n	$(1+\frac{1}{n})^2$	$(1+\frac{1}{n})^n$	$(1+\frac{1}{2})^n$
1	4,00	2,00	1,50
2	2,25	2,25	2,25
3	1,78	2,37	3,38
5	1,44	2,49	7,59
8	1,27	2,56	25,63
10	1,21		57,67
...	...	...	...
$n \to +\infty$			

3. Para certo elemento radiactivo, a massa *N* (gramas) existente ao fim de t horas é $N = 10 \times e^{-0{,}028 \times t}$.

a) Calcula, com aproximação à décima do grama, a massa inicial ($t = 0$), ao fim de 10 horas e ao fim de 50 horas.

b) Quanto tempo leva este elemento a reduzir-se a metade? (semi-vida).

O Professor