Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

19/04/99 ***Trigonometria*** **12.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma: ___

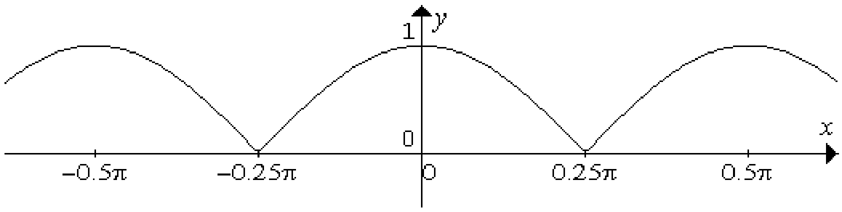
1. O gráfico apresentado pode ser uma representação geométrica da função *f*, real de variável real, definida por:

[A] $f(x) = |\operatorname{sen} x|$

[B] $f(x) = \operatorname{sen}|2x|$

[C] $f(x) = |\cos 2x|$

[D] $f(x) = \cos|x|$



2. O valor de $\lim_{h\to 0} \frac{\cos(\pi + h) - \cos\pi}{h}$ é igual a:

[A] $+\infty$. **[B]** -1 . **[C]** 0 . **[D]** 1 .

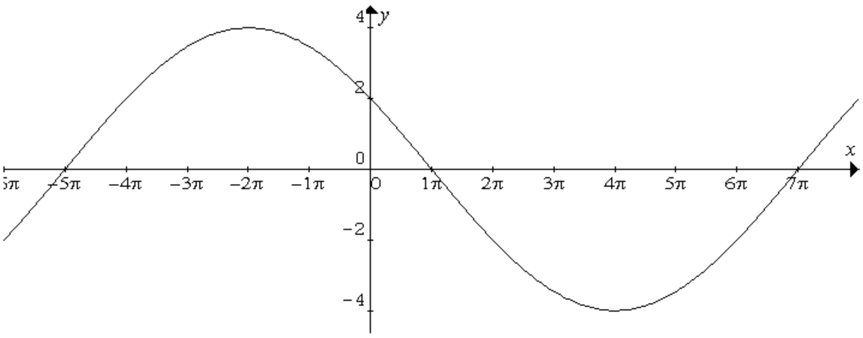
3. A curva representada é uma representação da função real de variável real definida por:

[A] $y = 4\operatorname{sen}\frac{x+\pi}{6}$.

[B] $y = 4\operatorname{sen}(\frac{x}{6} - 5\pi)$.

[C] $y = 4\operatorname{sen}\frac{x+5\pi}{6}$.

[D] $y = 4\operatorname{sen}6(x + 5\pi)$.



4. O valor exacto de $\cos\frac{19\pi}{12}$ é:

[A] $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ **[B]** $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **[C]** $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$. **[D]** 0,258819045.

5. A função derivada de ordem 18 da função *f*: $x \to \operatorname{sen} x$ é definida por:

[A] $x \to \cos x$. **[B]** $x \to -\operatorname{sen} x$. **[C]** $x \to -\cos x$. **[D]** $x \to \operatorname{sen} x$.

6. Se $f(x) = x^2 \cos x$, então $f'(\frac{\pi}{2})$ é igual a:

[A] $-\pi$. **[B]** π . **[C]** $-\frac{\pi^2}{4}$. **[D]** $\frac{\pi^2}{4}$.

7. Se $f: IR \to IR$ é uma função derivável tal que $\forall x \in IR,\ f(x) = -f(-x)$, então pode concluir que

[A] $f(x) = \cos x$. **[B]** $f(x) = \operatorname{sen} x$. **[C]** $f'(x) = -f'(-x)$. **[D]** $f'(x) = f'(-x)$.

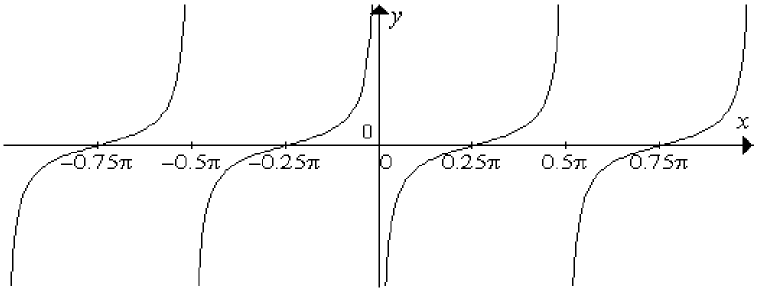
8. A figura representa parte do gráfico da função definida por:

[A] $tg(x-\frac{\pi}{2})$.

[B] $2tg(x+\frac{\pi}{2})$.

[C] $tg(2x+\frac{\pi}{2})$.

[D] $tg(x+\frac{\pi}{4})$.



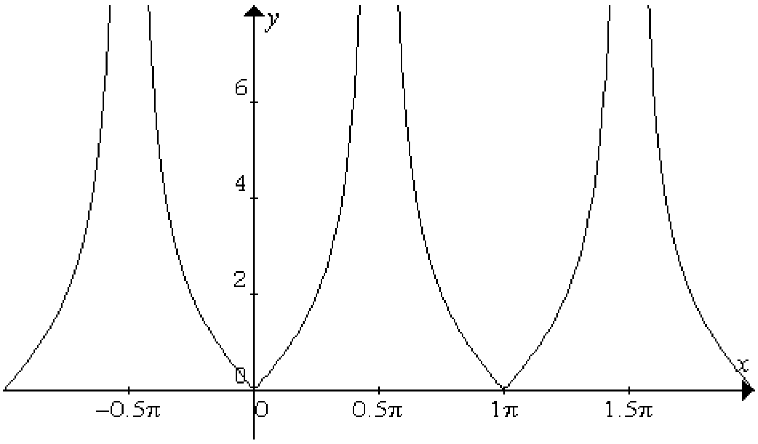
9. Uma função *f*, real de variável real, é periódica. O gráfico seguinte representa a função $|f|$ em parte do seu domínio.
Uma possível expressão analítica da função é:

[A] tgx.

[B] $tg(2x)$.

[C] $2tgx$.

[D] $1+tgx$.



10. Ainda em relação à função anterior, o domínio da função derivada de $|f|$ é:

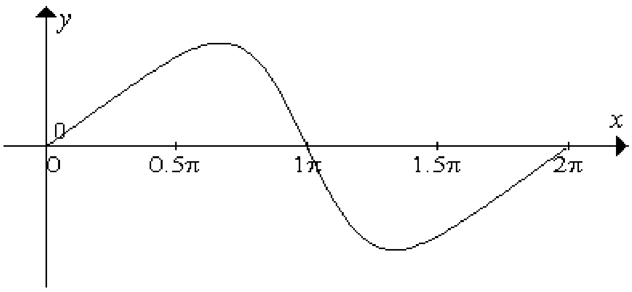
[A] $IR\setminus\left\{-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right\}$.

[B] $IR\setminus\left\{x: x=k\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}$.

[C] $IR\setminus\left\{x: x=k\pi+\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}$.

[D] $IR\setminus\left\{x: x\neq k\frac{\pi}{2},\ k\in Z\right\}$.

11. A representação gráfica de uma função *g* em $[0,2\pi]$ é a seguinte:
Quanto à existência de assimptotas do gráfico da função $\frac{1}{g}$, no mesmo intervalo, pode afirmar-se que:



[A] Não existem.

[B] São as rectas $x=0$, $x=\pi$ e $x=2\pi$.

[C] São as rectas $x=0$ e $y=0$.

[D] São as rectas $x=0$, $x=\frac{1}{\pi}$ e $x=\frac{1}{2\pi}$.

12. Relativamente à questão anterior, sabendo que a expressão analítica da função *g* é $g(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{2+\cos x}$, o contradomínio de *g* é:

[A] $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$.

[B] $[-1,1]$.

[C] $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$.

[D] $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

13. Um navio encontra-se atracado num porto.
A distância *h*, de um dado ponto do casco do navio ao fundo do mar, varia com a maré.
Admita que *h* é dada, em função do tempo x, por $h(x) = 10 - 3\cos(2x)$.
A distância desse ponto do casco ao fundo do mar, no momento da maré-alta, é:

[A] 4. **[B]** 10. **[C]** 13. **[D]** 16.

14. Considere a função *f* definida por $f(x) = \text{sen}\,(x^2)$.
Indique qual das expressões seguintes define *f'*, função derivada de *f*.

[A] $2x.\cos(x^2)$. **[B]** $\cos(x^2)$. **[C]** $2x.\cos(2x)$. **[D]** $-\cos(x^2)$.

15. Para um certo número real *k*, é contínua a função *m* definida por $m(x) = \begin{cases} e^{2x} + k & \Leftarrow \quad x \le 0 \\ \dfrac{\text{sen}\,x}{x} & \Leftarrow \quad x > 0 \end{cases}$.

O valor de *k* é

[A] -1. **[B]** 0. **[C]** 1. **[D]** 2.

16. Considere a função *t*, real de variável real: $t(x) = \dfrac{\text{sen}\,x}{1 - \text{sen}(\frac{\pi}{2} - x)}$.

a) Determine o seu domínio.

b) Estude os limites laterais de *t* quando *x* tende para zero.

c) Mostre que $t'(x) = \dfrac{1}{\cos x - 1}$ e conclua qual a variação da função t, no intervalo $]0, 2\pi[$.

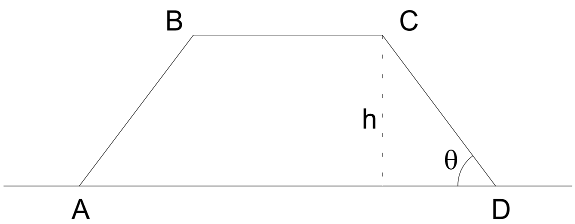
17. Considere a função real de variável real *g*, assim definida: $g(x) = \dfrac{\cos 2x}{1 - tgx}$.

a) Determine o domínio de g.

b) Sabendo que $\text{sen}(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\frac{4}{5}$ e α pertence ao 3.º Q, calcule $g(\alpha)$.

c) Calcule se existir $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} g(x)$.

18. A pedido de um dos clientes, um fabricante tem de construir peças metálicas de área máxima com a forma de um trapézio, em que $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 2\,\text{dm}$.
Designado por θ a medida da amplitude (em radianos) do ângulo ADC:



a) Exprima a altura *h* do trapézio e o comprimento da base maior em função de θ .

b) Prove que a área $A(\theta)$ do trapézio é dada, em decímetros quadrados, por $A(\theta) = 4\,\text{sen}\,\theta + 2\,\text{sen}\,2\theta$.

c) Determine o valor de θ para o qual a área do trapézio é máxima e calcule essa área.

d) Calcule $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{A(\theta)}{\theta}$.

19. Considere a função real de variável real assim definida: $h(x) = 1 - x + \operatorname{sen} 2x$.

a) Calcule, se existir, $\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - 1}{x}$.

b) Estude a monotonia de *h* no intervalo $[0, \pi]$.

c) Mostre que a equação $h(x) = 0$ tem uma única solução, x_0 , em $[0{,}5;\ 2]$ e determine um valor aproximado de x_0 , por defeito, a menos de uma centésima.

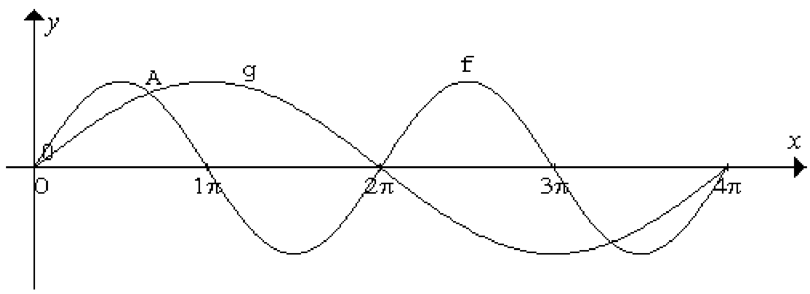
20. Considere a função real de variável real *g*, assim definida: $x \to \operatorname{sen}^2 x + \cos x$.

a) Prove que a função *g* tem pelo menos um zero no intervalo $\left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}\right]$.

b) Determine os intervalos de monotonia de *g*, no intervalo $]0, 2\pi[$.

c) Determine, no intervalo $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, a abcissa do ponto onde o gráfico de *g* admite uma tangente horizontal e escreva uma equação dessa tangente.

21. Na figura ao lado encontram-se representadas duas ondas definidas por $f(x) = 2 \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 2 \operatorname{sen}(\frac{x}{2})$.



a) Indique em que intervalo varia *g* quando $x \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{3}\right[$.

b) Determine $b \in IR$, de modo que $y = -x + b$ seja uma equação da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto A, assinalado na figura.

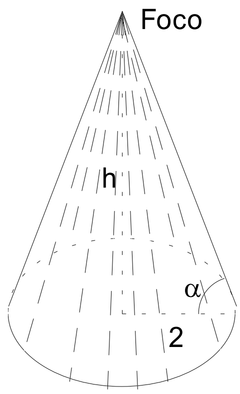
c) Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{g''(x)}{x}$.

d) Considere, no intervalo $[0, 4\pi]$, a onda ϕ definida por $\phi(x) = f(x) - g(x)$.
Recorrendo ao gráfico, indique para que valores da variável independente ϕ é positiva.

22. Para iluminar uma região circular de 2 metros de raio, coloca-se um foco sobre a vertical que passa pelo centro dessa região. A intensidade luminosa do foco, em certa unidade, é dada por:

$$I = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{h^2 + 4} .$$

sendo *h* a altura em metros, a que se coloca o foco e α o ângulo assinalado na figura.



a) Mostre que *I* é dada,

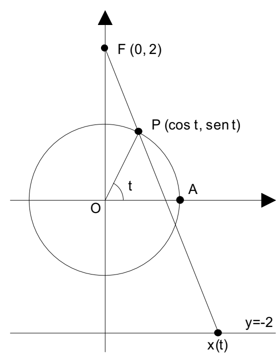
a1) em função de α , por $I(\alpha) = \frac{1}{8} \cos \alpha \operatorname{sen} 2\alpha$.

a2) em função de *h*, por $I(h) = h(4 + h^2)^{-\frac{3}{2}}$.

b) Calcule $\lim_{\alpha \to 0} \frac{I(\alpha)}{I(2\alpha)}$.

c) A que altura se deve colocar o foco para que a intensidade luminosa seja máxima?

23. O ponto P move-se sobre a circunferência de raio 1, no sentido positivo, a partir de A e percorrendo 1 grau por segundo. Um foco luminoso F, situado em (0, 2), produz a sombra de P sobre a linha $y = -2$.



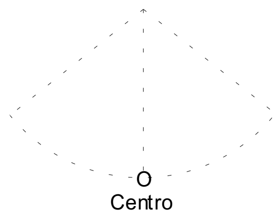
a) Prove que $x(t)$, abcissa do ponto sombra, é dada por $x(t) = \dfrac{4\cos t}{2 - \operatorname{sen} t}$.

(Note que o ponto sombra é a intersecção de duas rectas.)

b) Determine ao fim de quantos segundos a abcissa $x(t)$ atinge o valor máximo.

c) Em que instantes, a abcissa $x(t)$ varia (isto é, aumenta ou diminui) com maior rapidez?

24. O pêndulo de um relógio move-se continuamente afastando-se e aproximando-se do centro O. No instante *t* segundos, a distância ao centro é dada, em *cm*, por:



$$d(t) = |5\operatorname{sen}(4\pi t)|$$

a) Qual é a maior distância a que o pêndulo se encontra do centro?

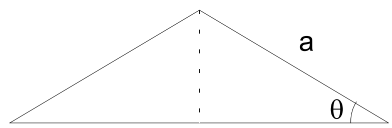
b) De quanto em quanto tempo o pêndulo passa pelo centro?

c) Qual a velocidade do pêndulo no instante $t = \frac{1}{16}$ segundos?

d) Faça um esboço do gráfico de *d*: $t \to d(t)$ em $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

e) Determine para que valores de $t \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, a distância que separa o pêndulo do centro é inferior a 2,5 *cm*.

25. Numa fábrica de cerâmica produzem-se tijoleiras triangulares. Cada peça é um triângulo isósceles de lado *a*, constante, como mostra a figura:



a) Mostre que a área de cada peça é dada, em função de θ , por:

$A(\theta) = \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}(2\theta)$, ($0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$; $a > 0$).

b) Para que valor de θ a área de cada peça será máxima?

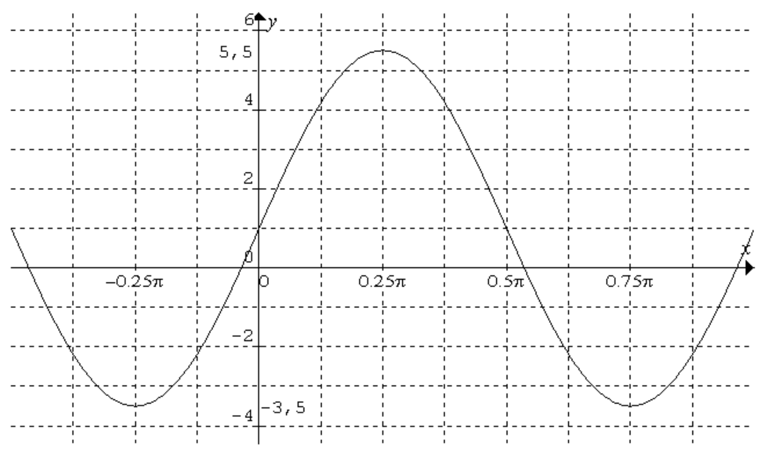
c) Justifique que, se o lado *a* de uma peça de tijoleira for menor que $\sqrt{2}$, a área da peça será inferior a 1, qualquer que seja o valor do ângulo θ .

d) Seja $L = \lim\limits_{\theta \to 0^+} \dfrac{A(\frac{\pi}{2} + \theta)}{\theta}$. Justifique que não existe logaritmo de L, qualquer que seja *a* positivo e seja qual for a base do logaritmo.

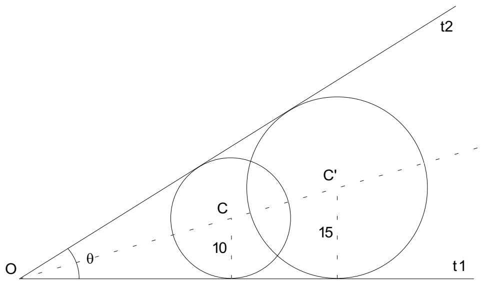
e) Seja *f*: $\theta \to \dfrac{a^2}{2}\operatorname{sen}(2\theta)$,

($\theta \in IR$, a *constante*).

Sabendo que a figura ao lado representa parte do gráfico de $k + f$ (com *k* constante), determine os valores de *k* e de *a*.



26. Na figura estão representadas duas circunferências de centros C e C' e raios 10 e 15 cm, respectivamente. As semirectas t1 e t2 são tangentes às duas circunferências e formam entre elas um ângulo θ tal que $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

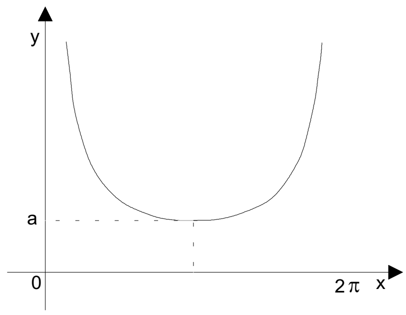


a) Sendo $\overline{CC'}$ a distância entre os centros das duas circunferências, mostre que, na unidade considerada, $\overline{CC'} = \dfrac{5}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$.

b) Para que valor do ângulo θ as duas circunferências são tangentes? (Aproximação a menos de 0,01 rad).

c) Qual é a menor distância que pode existir entre os centros das duas circunferências?

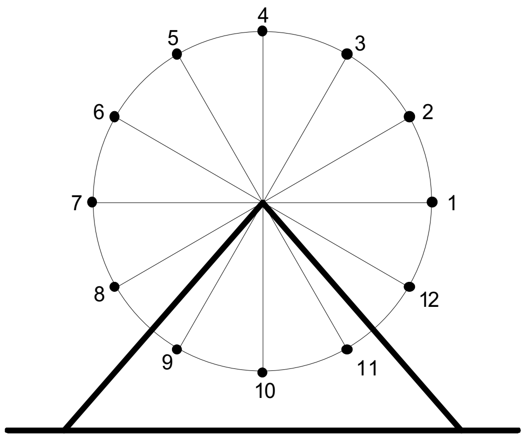
d) Considere a função de variável real *d*: $\theta \rightarrow \dfrac{5}{\operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$.



d1) Justifique que o gráfico de *d* é simétrico em relação à origem do referencial.

d2) Sabendo que em $]0, 2\pi[$ o gráfico de *d* tem a seguinte representação, indique o valor de *a* e o contradomínio de *d*.

27. Uma roda gigante de um parque de diversões tem doze cadeiras, numeradas de 1 a 12, com um lugar cada uma (ver figura). Seis raparigas e seis rapazes vão andar na roda gigante e sorteiam entre si os lugares que vão ocupar.



a) Qual é a probabilidade de rapazes e raparigas ficarem sentados alternadamente, isto é, cada rapaz entre duas raparigas e cada rapariga entre dois rapazes? Apresente o resultado na forma de percentagem.

b) Depois de toda a gente estar sentada nas respectivas cadeiras, a roda gigante começa a girar. Um dos rapazes, o Manuel, ficou sentado na cadeira número 1. No instante em que a roda gigante começa a girar, a cadeira 1 está na posição indicada na figura acima. Admita que a distância, em metros, da cadeira 1 ao solo, *t* segundos após a roda gigante ter começado a girar, é dada por

$$d(t) = 7 + 5\operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{30}\right).$$

b1) Determine a distância a que a cadeira número 1 se encontra do solo no instante em que a cadeira começa a girar.

b2) Esboce o gráfico da função *d*, para $t \in [0, 75]$.
Assinale as coordenadas dos pontos correspondentes aos extremos da função. Da análise do gráfico, indique quanto tempo demora o Manuel a dar uma volta completa.

b3) Resolva a equação $d(t) = 9{,}5$ para $t \in [0, 75]$.
Indique, justificando, quanto tempo demora o Manuel a encontrar-se pela primeira vez a uma distância de 9,5 metros do solo, depois da roda gigante ter começado a girar.

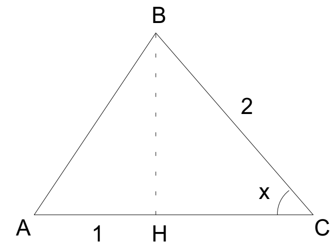
b4) Indique, justificando, qual é o comprimento do raio da roda gigante.

28. Considere a função g definida em $[0,\pi]$ por $g(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x)$.

a) Determine os zeros da função g.

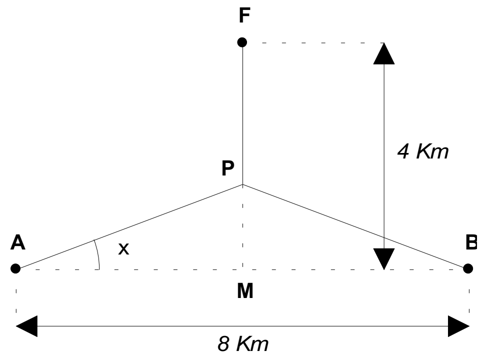
b) Estude, quanto à existência de assimptotas, a função h definida em $[0,2\pi] \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ por $h(x) = \dfrac{g(x)}{\cos x}$.

c) Mostre que, para qualquer $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $g(x)$ é a área de um triângulo [*ABC*], em que:



- x é a amplitude do ângulo *BCA*;
- $\overline{BC} = 2$;
- [*BH*] é a altura relativa ao vértice *B*;
- $\overline{AH} = 1$.

29. Duas povoações, *A* e *B*, distanciadas 8 Km uma da outra, estão a igual distância de uma fonte de abastecimento de água, localizada em *F*.



Pretende-se construir uma canalização ligando a fonte às duas povoações, como se indica na figura ao lado. A canalização é formada por três canos: um que vai da fonte *F* até um ponto *P* e dois que partem de *P*, um para *A* e outro para *B*. O ponto *P* está a igual distância de *A* e de *B*.

Tem-se ainda que:

- o ponto *M*, ponto médio de [*AB*], dista 4 Km de *F*;
- x é a amplitude do ângulo *PAM* ($x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$).

a) Tomando para unidade o quilómetro, mostre que o comprimento total da canalização é dado por:

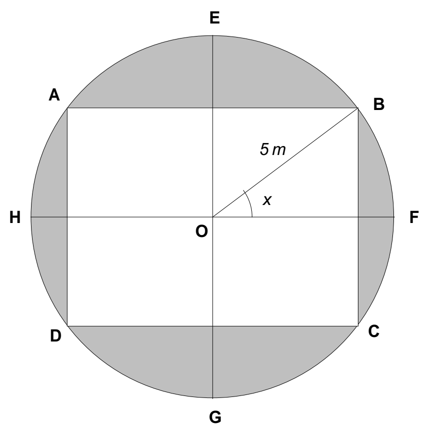
$$c(x) = 4 + \frac{8 - 4\operatorname{sen} x}{\cos x}.$$

SUGESTÃO: Comece por mostrar que $\overline{PA} = \dfrac{4}{\cos x}$ e que $\overline{FP} = 4 - 4\operatorname{tg} x$.

b) Calcule $c(0)$ e interprete o resultado obtido, referindo a forma da canalização e consequente comprimento.

c) Determine o valor de x para o qual o comprimento total da canalização é mínimo.

30. A figura ao lado representa um canteiro de forma circular com 5 m de raio. O canteiro tem uma zona rectangular, que se destina à plantação de flores, e uma zona relvada, assinalada a sombreado na figura .



Os vértices *A*, *B*, *C* e *D* do rectângulo pertencem à circunferência que limita o canteiro.

Na figura estão também assinalados:

- dois diâmetros da circunferência, [*EG*] e [*HF*], que contêm os pontos médios dos lados do rectângulo;
- o centro *O* da circunferência;
- o ângulo *BOF*, de amplitude x ($x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$).

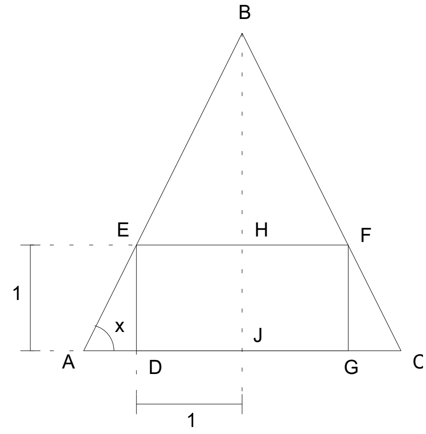
a) Mostre que a área (em m^2) da zona relvada (parte sombreada) é dada, em função de x, por

$$r(x) = 25\pi - 50\operatorname{sen}(2x).$$

b) Recorrendo ao Teorema de Bolzano, mostre que existe um valor de x compreendido entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{4}$ para o qual a área da zona relvada é 30 m^2.

31. Na figura

- o triângulo [ABC] é isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$)
- [DEFG] é um rectângulo
- $\overline{DG} = 2$
- $\overline{DE} = 1$
- *x* designa a amplitude do ângulo *BAC*



a) Mostre que a área do triângulo [*ABC*] é dada em função de *x*, por

$$f(x) = 2 + tgx + \frac{1}{tgx} \qquad (x \in \left]0, \tfrac{\pi}{2}\right[).$$

NOTA: Pode ser-lhe útil reparar que $B\hat{E}F = B\hat{A}C$.

b) Mostre que $f'(x) = -\frac{\cos(2x)}{\text{sen}^2 x . \cos^2 x}$ (*f'* designa a derivada de *f*).

c) Determine o valor de *x* para o qual a área do triângulo [*ABC*] é mínima.

32. Considere a função *f*: $IR \to IR$, definida por $f(x) = \text{sen}(x) - \frac{1}{2}\text{sen}(2x)$.

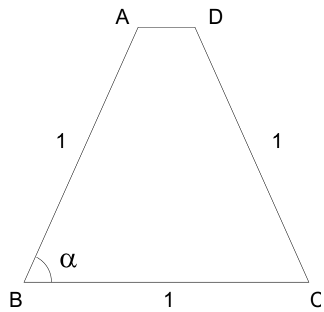
a) Recorrendo à definição de derivada de uma função num ponto, determine $f'(0)$.

b) [*ABCD*] é um trapézio isósceles; os lados [*AD*] e [*BC*] são paralelos.

Tem-se que:

- $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = 1$
- $\overline{AD} \le 1$

Seja α a amplitude do ângulo *ABC* ($\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$).



b1) Mostre que, para cada $\alpha \in \left]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right]$, a área do trapézio é igual a $f(\alpha)$.

b2) Determine $f(\frac{\pi}{2})$ e interprete geometricamente o resultado obtido, caracterizando o quadrilátero que se obtém para $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

SOLUÇÕES

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	C	C	B	B	C	D	C	C	B	B	D	C	A	B

16.

a) $D_t = \{x \in IR : x \neq 2k\pi, k \in Z\}$

b) $\lim_{x \to 0^-} t(x) = -\infty$; $\lim_{x \to 0^+} t(x) = +\infty$

c) *t* é decrescente no intervalo considerado, visto $t'(x) < 0, \forall x \in \left]0, 2\pi\right[$, pois $\cos x < 1, \forall x \in \left]0, 2\pi\right[$.

17.

a) $D_g = \{x \in IR : x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ \wedge \ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in Z\}$

b) $g(\alpha) = \frac{28}{25}$

c) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} g(x) = 1$

18.

a) $h = 2\,\text{sen}\,\theta$; $\overline{AD} = 2 + 4\cos\theta$

c) A área é máxima para $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

A área máxima é $3\sqrt{3}$ dm^2.

d) $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{A(\theta)}{\theta} = 8$

19.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{h(x) - 1}{x} = 1$

b) h é crescente em $\left[0, \dfrac{\pi}{6}\right]$ e em $\left[\dfrac{5\pi}{6}, \pi\right]$;

h é decrescente em $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}\right]$.

c) 1,03 é um valor aproximado, por defeito, a menos de uma centésima, do zero.

20.

a) Aplique o teorema de Bolzano.

b) g é crescente em $\left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ e em $\left[\pi, \dfrac{5\pi}{3}\right]$;

g é decrescente em $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$ e em $\left[\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right[$.

c) $\dfrac{\pi}{3}$ é a abcissa do ponto pedido.

Uma equação dessa recta é $y = \dfrac{5}{4}$.

21.

a) Como g é contínua, varia em $]-1, 2]$.

b) $b = \sqrt{3} + \dfrac{2\pi}{3}$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g''(x)}{x} = -\dfrac{1}{4}$

d) A diferença $f(x) - g(x)$ é positiva nos intervalos em que o gráfico de f fica acima do gráfico de g, ou seja, em $\left]0, \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]2\pi, \dfrac{10\pi}{3}\right[$.

$\dfrac{10\pi}{3}$ é a abcissa do ponto de intersecção dos gráficos abaixo do eixo dos xx e pode ser determinado usando os cálculos da alínea b).

22.

b) $\lim\limits_{\alpha \to 0} \dfrac{I(\alpha)}{I(2\alpha)} = \dfrac{1}{2}$

c) A altura a que se deve colocar o foco para que a intensidade luminosa seja máxima é $\sqrt{2}$ metros.

23.

b) Como $\dfrac{\pi}{6}$ rad corresponde a 30º e o ponto P percorre um grau por segundo, podemos concluir que a abcissa $x(t)$ atinge o valor máximo ao fim de 30 segundos.

c) Determinar os instantes em que $x(t)$ varia com maior rapidez é determinar os instantes correspondentes aos extremos de $x'(t)$.

$x''(t) = \dfrac{-8\cos t(1 + \text{sen}\,t)}{(2 - \text{sen}\,t)^3}$.

Como $\dfrac{1 + \text{sen}\,t}{(2 - \text{sen}\,t)^3} \geq 0, \forall t \geq 0$ e $\cos t$, quando se anula, muda de sinal, todos os zeros de $x''(t)$ são extremos relativos de x'.

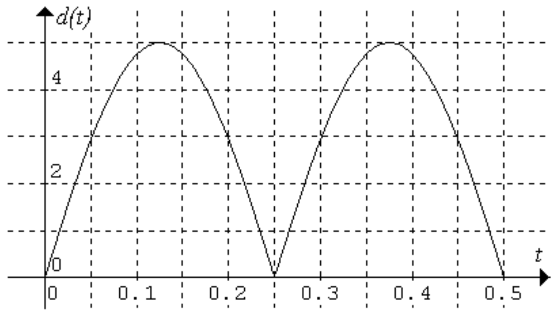
Podemos, então, dizer que os instantes em que $x(t)$ varia com maior ou menor rapidez são $(90 + k \times 180)$ segundos, com $k \in Z_0^+$.

24.

a) 5 cm

b) O pêndulo passa pelo centro de $\dfrac{1}{4}$ em $\dfrac{1}{4}$ segundos.

c) A velocidade pedida é $10\sqrt{2}\pi$ cm/s.



d)

e) $t \in \left[0, \dfrac{1}{24}\right[\cup \left]\dfrac{5}{24}, \dfrac{7}{24}\right[\cup \left]\dfrac{11}{24}, \dfrac{1}{2}\right]$

25.

b) A área é máxima quando $\text{sen}(2\theta)$ é máximo, ou seja 1. Logo, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, pois $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$.

d) $L = -a^2$.

Como $-a^2 < 0, \forall a \in IR^+$ e como o domínio da função logarítmica é IR^+, não existe logaritmo de L em qualquer base.

e) $\begin{cases} k = 1 \\ a = 3 \quad \vee \quad a = -3 \end{cases}$

26.

b) As duas circunferências são tangentes se e só se a distância de um centro ao outro é igual à soma dos raios, donde $\text{sen}\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{1}{5}$.

Quando o ângulo medir aproximadamente 0,40 radianos as duas circunferências são praticamente tangentes.

c) $\overline{CC'}$ é mínimo quando o denominador da fracção for máximo, pois o numerador é constante.
A menor distância entre os centros das duas circunferências é $5\sqrt{2}$ cm.

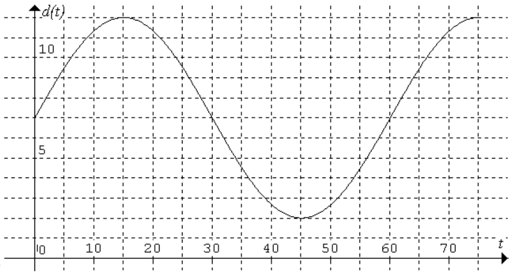
d1) Como $d(-\theta) = d(\theta), \forall \theta \in D_d$, isto é, como d é uma função ímpar, está garantido que o seu gráfico é simétrico em relação á origem do referencial.

d2) $a = 5$; $]-\infty, -5] \cup [5, +\infty[$.

27.

a) $P = \dfrac{2 \times 6! \times 6!}{12!} = 0{,}216\%$

b1) Está a uma altura de 7 m do solo.



b2)

O ponto (45, 2) corresponde ao mínimo da função.
Os pontos (15, 12) e (75, 12) correspondem aos máximos (absolutos) da função.
O Manuel demora 1 minuto a dar uma volta.

b3) $\{5, 25, 65\}$;
A primeira vez que o Manuel está a 9,5 m do solo é após a roda rodar durante 5 segundos.

b4) 5 metros.

28.

a) $\{0, \dfrac{2\pi}{3}, \pi\}$

b) Pelo facto do domínio de h ser um conjunto limitado, não tem sentido procurar assimptotas não verticais.
O único ponto de acumulação do domínio da função não lhe pertencente é $x = \dfrac{\pi}{2}$, pelo que só poderá haver assimptota vertical nesse ponto.
Apenas existe uma assimptota vertical bilateral de equação $x = \dfrac{\pi}{2}$, pois $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty$ e

$\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^+} h(x) = -\infty$.

c) $Base = 1 + 2\cos x$; $Altura = 2\,\text{sen}\, x$;

$Area = \dfrac{(1 + 2\cos x).2\,\text{sen}\, x}{2} = \text{sen}\, x + \text{sen}(2x)$.

29.

b) $c(0) = 4 + \dfrac{8 - 4 \times 0}{1} = 12$.
Na situação de a amplitude do ângulo PAM ser de 0º $(x = 0)$, a canalização toma a forma de um T invertido (um cano de F a M, outro de M a A e outro de M a B) e o seu comprimento é de 12 Km.

c) $\dfrac{\pi}{6}$ é o valor de x para o qual g toma o seu valor mínimo.

30.

b) A função g é contínua em $\left[\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right]$, pois é contínua no seu domínio, visto ser a soma e o produto de funções contínuas em IR.
Por outro lado, $g(\frac{\pi}{4}) < 30$ e $g(\frac{\pi}{6}) > 30$.
Logo, $g(\frac{\pi}{4}) < 30 < g(\frac{\pi}{6})$.
Portanto, de acordo com o teorema de Bolzano, $\exists x \in \left]\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}\right[: g(x) = 30$.

31.

b)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{0 - \frac{1}{\cos^2 x}}{tg^2 x} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x . \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x}} \\ &= \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\text{sen}^2 x} \\ &= \frac{\text{sen}^2 x - \cos^2 x}{\text{sen}^2 x . \cos^2 x} \\ &= -\frac{\cos(2x)}{\text{sen}^2 x . \cos^2 x} \end{aligned}$$

c) $\dfrac{\pi}{4}$ é o valor de x para o qual a área do triângulo $[ABC]$ é mínima.

32.

a)

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x - \frac{1}{2}\text{sen}(2x)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} - \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(2x)}{x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}\, x}{x} - \lim_{x \to 0} \frac{\text{sen}(2x)}{2x} \\ &= 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

b2) $f(\frac{\pi}{2}) = \text{sen}\frac{\pi}{2} - \frac{2}{2}\text{sen}\,\pi = 1 - 0 = 1$.

Para $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$, o quadrilátero obtido é um quadrado de lado 1, sendo a sua área $f(\frac{\pi}{2}) = 1$

O Professor