# Escola Secundária da Sé-Lamego

## Ficha de Trabalho de Matemática

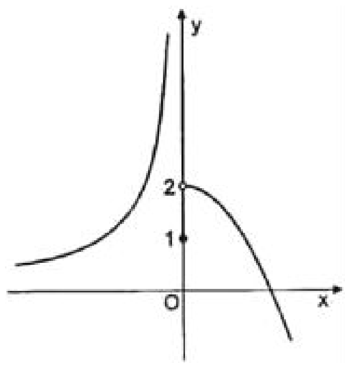
**24/01/99** **Análise Combinatória e Probabilidades (e Revisões)** **12.º Ano A**

Nome: ______________________________________________ N.º: ___ Turma: ___

# 1.ª Parte

*Para cada uma das seguintes questões de escolha múltipla, seleccione a resposta correcta de entre as alternativas que lhe são apresentadas e escreva na sua folha de respostas a letra que lhe corresponde.*
***Atenção!*** *Se apresentar mais do que uma resposta a questão será anulada, o mesmo acontecendo em caso de resposta ambígua.* ***Cotação***: *cada resposta certa, +10 pontos; cada resposta errada, -10/3 pontos; questão não respondida ou anulada, 0 pontos.*

**1.** Na figura está parte da representação gráfica de uma função *g* de domínio *IR* e contínua em $IR \setminus \{0\}$.

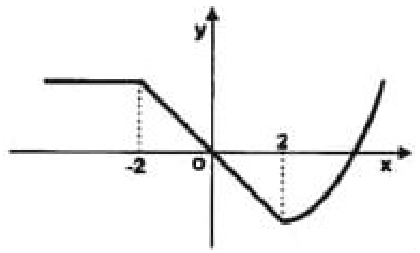



Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n}$.

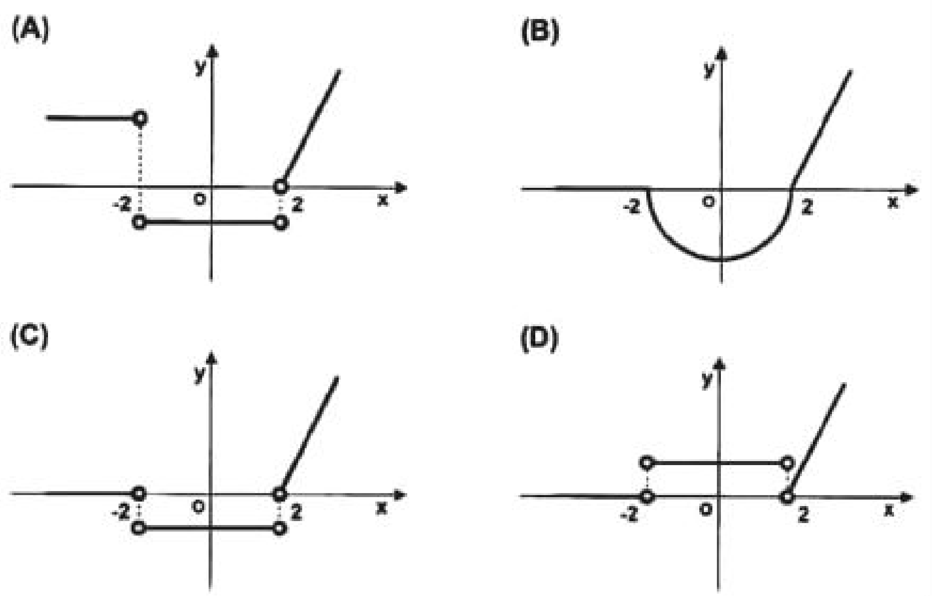
Indique o valor de $\lim_{n\to+\infty} g(u_n)$.

**[A]** 0. **[B]** 1.
**[C]** 2. **[D]** $+\infty$.

**2.** Se a representação gráfica de uma função *h* é




então a representação gráfica de *h'*, derivada de *h*, pode ser:




**3.** Numa certa localidade, o preço a pagar por mês pelo consumo de água é a soma das seguintes parcelas:

- 500 escudos pelo aluguer do contador;
- 200 escudos por cada metro cúbico de água consumida até 10 m$^3$;
- 400 escudos por cada metro cúbico de água consumida para além de 10 m$^3$.

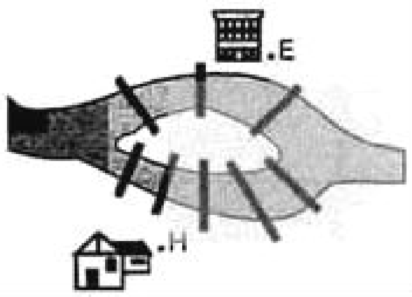
Indique qual das funções seguintes traduz correctamente o preço a pagar, em escudos, em função do número *x* de metros cúbicos consumidos.

**[A]** $a(x) = \begin{cases} 700x & \Leftarrow \quad x \le 10 \\ 500 + 400x & \Leftarrow \quad x > 10 \end{cases}$. **[B]** $b(x) = \begin{cases} 500 + 200x & \Leftarrow \quad x \le 10 \\ 500 + 400x & \Leftarrow \quad x > 10 \end{cases}$.

**[C]** $c(x) = \begin{cases} 500 + 200x & \Leftarrow \quad x \le 10 \\ 2500 + 400x & \Leftarrow \quad x > 10 \end{cases}$. **[D]** $d(x) = \begin{cases} 500 + 200x & \Leftarrow \quad x \le 10 \\ 2500 + 400(x-10) & \Leftarrow \quad x > 10 \end{cases}$.

**4.** Na figura ao lado estão representados:

- o rio que atravessa certa localidade;
- uma ilha situada no leito desse rio;
- as oito pontes que ligam a ilha às margens.




H representa a habitação e E a escola de um jovem dessa localidade.

Para efectuar o percurso **de ida** (*casa-ilha-escola*) **e volta** (*escola-ilha-casa*), o jovem pode seguir vários caminhos, que diferem uns dos outros pela sequência de pontes utilizadas. Indique quantos caminhos diferentes pode o jovem seguir, num percurso **de ida e volta**, **sem passar duas vezes pela mesma ponte**.

**[A]** $5 \times 3 + 4 \times 2$. **[B]** $5 \times 4 \times 3 \times 2$. **[C]** $5 + 4 + 3 + 2$. **[D]** $5^2 \times 3^2$.

**5.** Uma moeda equilibrada é lançada **dez vezes**.
A probabilidade do acontecimento "**a face escudo sai exactamente quatro vezes**" é:

**[A]** $C_4^{10}(\frac{1}{2})^{10}$. **[B]** $\frac{4}{10}$. **[C]** $\frac{10}{2^4}$. **[D]** $\frac{4}{2^{10}}$.

**6.** De uma função *g*, de domínio *IR*, sabe-se que:

- $g(0) = 1$
- *g* é estritamente crescente em $[0, +\infty[$
- *g* é par

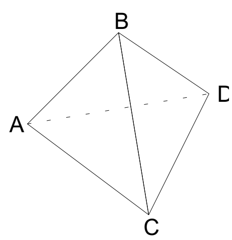
Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

**[A]** O contradomínio de *g* é $[0, +\infty[$. **[B]** *g* é estritamente crescente em *IR*.

**[C]** *g* é injectiva. **[D]** *g* não tem zeros.

**7.** Na figura está representado um tetraedro regular (sólido geométrico com quatro faces, que são todas **triângulos equiláteros**).

- A, B, C e D são vértices do tetraedro
- $\overline{AB} = 6$




O valor do produto escalar $\vec{BC}.\vec{BD}$ é

**[A]** 18. **[B]** $18\sqrt{2}$. **[C]** 36. **[D]** $36\sqrt{2}$.

**8.** O penúltimo número de uma certa linha do Triângulo de Pascal é 10. Qual é o terceiro número dessa linha?

**[A]** 11. **[B]** 19. **[C]** 45. **[D]** 144.

**9.** Um dado é lançado cinco vezes.
Qual é a probabilidade de que a face *seis* apareça pelo menos uma vez?

**[A]** $1-(\frac{1}{6})^5$.    **[B]** $1-(\frac{5}{6})^5$.    **[C]** $C_1^5(\frac{1}{6})^5$.    **[D]** $C_1^5(\frac{5}{6})^5$.

**10.** Para certos exames, os candidatos devem preparar cem temas, dos quais três, seleccionados ao acaso, sairão no exame. Um candidato apresenta-se a exame tendo preparado apenas um quarto dos temas.
A probabilidade de que tenha estudado só dois dos temas que saíram é:

**[A]** $\frac{3\times {}^{25}C_2}{{}^{100}C_3}$.    **[B]** $\frac{{}^{25}C_2}{{}^{100}C_3}$.    **[C]** $\frac{225\times {}^{25}C_2}{{}^{100}C_3}$.    **[D]** $\frac{75\times {}^{25}C_2}{{}^{100}C_3}$.

**11.** De um saco contendo vinte rifas numeradas de 1 até 20, retiram-se duas de uma só vez.
Qual a probabilidade de obter números consecutivos?

**[A]** 8%.    **[B]** 20%.    **[C]** 10%.    **[D]** 10,5%.

**12.** A probabilidade de o João, o Ricardo e a Ana terem nascido em dias da semana todos diferentes é:

**[A]** $\frac{1}{7^3}$.    **[B]** $\frac{30}{49}$.    **[C]** $\frac{3}{7}$.    **[D]** $\frac{4}{7}$.

**13.** Um totobola é constituído por 13 jogos.
A probabilidade de acertar em treze resultados com uma tripla e uma dupla é:

**[A]** $\frac{3}{858}$.    **[B]** $\frac{2\times 3}{{}^{13}A_3}$.    **[C]** $\frac{78}{3^{13}}$.    **[D]** $\frac{2}{3^{12}}$.

**14.** O número de grupos de 4 letras que é possível formar usando as letras A, B, C, D, E, F e G, e sabendo que começam por G, utilizam sempre a letra E e que não pode haver letras repetidas, é:

**[A]** 120.    **[B]** 20.    **[C]** 60.    **[D]** 820.

**15.** As matrículas dos automóveis na Eurolândia são formadas por um conjunto de duas letras seguidas de três algarismos (23 letras e 10 algarismos).

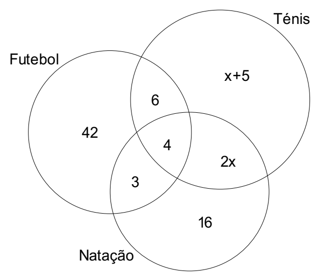
**a)** O número de matrículas que se podem formar é:

**[A]** $33^5$.    **[B]** ${}^{23}C_2\times{}^{10}C_3$.    **[C]** 1380.    **[D]** $23^2\times 10^3$.

**b)** Se as letras e os algarismos forem diferentes, o número de matrículas que se podem formar é:

**[A]** 230.    **[B]** ${}^{23}A_2'\times{}^{10}A_3'$.    **[C]** 364.320.    **[D]** ${}^{33}A^5$.

**16.** Os alunos do 12.º ano de uma escola que praticam desporto nos seus tempos livres distribuem-se pelo futebol, natação e ténis, de acordo com a representação no diagrama ao lado.




**a)** Se a probabilidade de que um aluno escolhido ao acaso seja praticante de futebol situa-se entre 60% e 61%, então o número de alunos do 12.º ano que praticam ténis é:

**[A]** 30.    **[B]** 10.    **[C]** 27.    **[D]** 21.

**b)** Se o número total de alunos representados no diagrama é 106, então a probabilidade de que ao escolher um dos alunos ao acaso, este pratique mais do que uma modalidade é cerca de:

**[A]** 4%.    **[B]** 31%.    **[C]** 69%.    **[D]** 27%.

**17.** Das afirmações seguintes:

I. A Lei de Laplace pode aplicar-se a qualquer acontecimento aleatório.

II. A probabilidade da intersecção de dois acontecimentos dependentes A e B é: $p(A \cap B) = p(B).p(A/B)$.

III. Nos arranjos com repetição ( ${}^{n}A'_{p}$ ), n tem de ser menor ou igual a p.

IV. A equação $n(n-1)! = 0!$, com $n \in IN$, é impossível.

quais são verdadeiras?

**[A]** Apenas I. **[B]** Apenas II.

**[C]** Apenas III. **[D]** Apenas IV.

**18.** A probabilidade de no Totoloto (com 49 números) saírem 6 números consecutivos é igual a:

**[A]** $\frac{44}{{}^{49}A_6}$. **[B]** $\frac{49}{6\times{}^{49}C_6}$. **[C]** $\frac{P_6}{{}^{49}A_6}$. **[D]** $\frac{44}{{}^{49}C_6}$.

**19.** No desenvolvimento do binómio $(x+2)^{10}$, o termo em $x^4$ é:

**[A]** $15.360x^4$. **[B]** $13.440x^4$. **[C]** $11.520x^4$. **[D]** $8.064x^4$.

**20.** Um cesto contém uma dúzia de ovos, 6 dos quais estão estragados.
A probabilidade de uma pessoa retirar 4 dos ovos existentes no cesto e estarem todos bons é:

**[A]** $\frac{1}{33}$. **[B]** $\frac{1}{3}$. **[C]** $\frac{1}{2}$. **[D]** $\frac{2}{3}$.

**21.** Os quatro primeiros números de certa linha do triângulo de Pascal são 1, 11, 55 e 165; então os três últimos números da linha seguinte são:

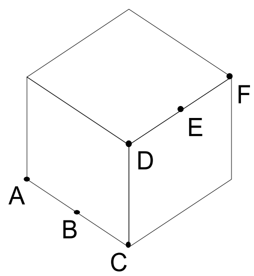
**[A]** 36, 24 e 1. **[B]** 66, 12 e 1.

**[C]** 220, 66 e 12. **[D]** 24, 12 e 1.

**22.** Cinco amigos vão dar um passeio de automóvel de 5 lugares. Sabendo que só três deles podem conduzir, o número de formas diferentes de ocuparem os lugares durante o passeio é dado por:

**[A]** ${}^{3}A_1\times{}^{4}A_2$. **[B]** ${}^{5}C_4\times{}^{3}C_1$. **[C]** ${}^{3}C_1\times{}^{4}A_4$. **[D]** ${}^{3}C_1\times{}^{4}C_4$.

**23.** Considere os pontos A, B, C, D, E e F representados sobre o cubo, na figura ao lado.
Escolhendo três destes pontos ao acaso, a probabilidade de que eles definam um plano é:




**[A]** 0,9. **[B]** 0,(3).

**[C]** 0,5. **[D]** 1.

**24.** Sabe-se que a probabilidade de obter a face A, ao efectuar um lançamento de uma moeda mal calibrada, é 0,7. Lançando 8 vezes a moeda, qual a probabilidade de obter exactamente 3 vezes essa face?

**[A]** $0{,}7^3\times{}^{8}C_3$. **[B]** $0{,}7^5\times 0{,}3^3\times{}^{8}C_3$. **[C]** ${}^{8}C_5 + 0{,}7^5$. **[D]** $0{,}7^3\times 0{,}3^5\times{}^{8}C_5$.

**25.** Sendo $(a_n)$ a sucessão de termo geral $a_n = 2^{-1} + 2^{-2} + \ldots + 2^{-n}$, o $\lim a_n$ é igual a:

**[A]** 0. **[B]** 1. **[C]** $+\infty$. **[D]** -2.

# 2.ª Parte

*Nas questões seguintes, apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando todos os cálculos que tiver de efectuar e as justificações que entender necessárias.*

**1.** Um grupo de amigos, constituído por três rapazes e duas raparigas, vai ao cinema e ocupa 5 lugares consecutivos.

**a)** De quantos modos diferentes se podem sentar?

**b)** E se as raparigas ficarem nos extremos?

**c)** E se nenhuma das raparigas se sentar nos extremos?

**2.** Lançaram-se, simultaneamente, dois dados e adicionaram-se os pontos obtidos.

**a)** Qual a probabilidade de a soma ser superior a sete?

**b)** Qual a probabilidade de, ao fim de seis lançamentos, se obter quatro e só quatro vezes somas superiores a sete?

**3.** Um saco contém nove bolas: 2 verdes, 3 azuis e 4 roxas.
As bolas são indistinguíveis ao tacto e extraem-se sucessivamente 3 bolas.

**a)** Supondo que a extracção se faz com reposição,

**a1)** determine a probabilidade de que a 1.ª bola extraída seja verde, a 2.ª seja azul e a 3.ª seja roxa;

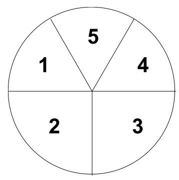
**a2)** determine a probabilidade de extrair 3 bolas de cores diferentes (por qualquer ordem).

**b)** Supondo que a extracção se faz sem reposição,

**b1)** determine a probabilidade de que a 1.ª bola extraída seja verde, a 2.ª seja azul e a 3.ª seja roxa;

**b2)** determine a probabilidade de extrair 3 bolas de cores diferentes (por qualquer ordem).

**4.** Em casa do João há uma roleta como a que a figura ilustra. Um dos semicírculos está dividido em três partes iguais e o outro em duas partes iguais.




**a)** Se o João jogar uma vez nesta roleta qual a probabilidade de obter um número par?

**b)** Se jogar cinco vezes consecutivas, qual é a probabilidade de "***sair 3***" pelo menos quatro vezes?

**5.** Num dado **não equilibrado**, a probabilidade de "*sair 6*" é 0,4, tendo as restantes faces igual probabilidade de ocorrer.

**a)** Mostre, que efectuando apenas um lançamento deste dado, a probabilidade de "*sair 1*" é 12%.

**b)** Lançando cinco vezes consecutivas o dado referido, qual é a probabilidade de se obter duas e só duas vezes "um número ímpar"?

**6.** Os alunos de uma turma do 12.º ano pretendem realizar um passeio de finalistas, mas não conseguem chegar a acordo acerca do destino. Na pré-inscrição, 20 inscreveram-se no passeio a Londres, 12 inscreveram-se no passeio a Paris, 10 inscreveram-se nos dois destinos. Todos os alunos se inscreveram pelo menos num destino.

**a)** Mostre que a turma é constituída por 22 alunos.

**b)** Decidiu-se formar uma comissão com 2 alunos da turma para decidir o destino da viagem. De quantas maneiras se pode formar a comissão?

**c)** Qual a probabilidade de, escolhida aleatoriamente esta comissão, os alunos que a formam tenham manifestado pelo menos um destino comum?

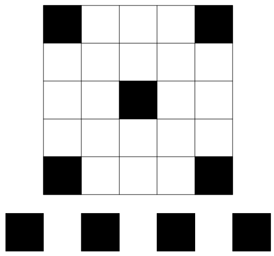
**7.** Uma das provas de um campeonato de atletismo é a estafeta 4×100 metros planos em que cada equipa participa com 4 atletas. O clube "Pés Voadores" vai participar na prova, dispondo de 10 atletas para formar a equipa de estafeta.

**a)** Quantos conjuntos diferentes é possível constituir para formar a equipa de estafeta deste clube?

**b)** Formada a equipa é necessário estabelecer a ordem de participação dos atletas que a constituem. Por razões tácticas escolheu-se o João Rui para iniciar a prova, podendo os restantes atletas da equipa participar em qualquer posição. De quantas formas diferentes se pode organizar esta equipa?

**c)** Ao todo vão competir na prova 6 equipas de clubes diferentes. A colocação das equipas pelas 8 pistas é feita por sorteio. Qual a probabilidade de que a equipa dos "Pés Voadores" corra na pista 1 não ficando nenhuma equipa na pista 2?

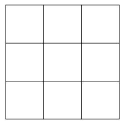
**8.** Um quadro de palavras cruzadas, constituído por 5 linhas e 5 colunas, tem 9 quadrículas a cheio. Destas, sabe-se que 5 ocuparão os 4 cantos e o quadrado central, podendo as restantes ocupar qualquer outra posição (ver figura).



**a)** Mostre que se podem obter 4845 quadros diferentes satisfazendo as condições indicadas.

**b)** Qual a probabilidade de que, ao escolher ao acaso um dos quadros possíveis, este tenha pelo menos um das diagonais com quadrículas a cheio?

**9.** Pretende-se colocar, sobre um tabuleiro situado à nossa frente, como o representado na figura, nove peças de igual tamanho e feitio, das quais quatro são brancas e cinco são pretas. Cada casa do tabuleiro é ocupada por uma só peça.



**a)** Mostre que existem 126 maneiras diferentes de as peças ficarem colocadas no tabuleiro.

**b)** Supondo que as peças são colocadas ao acaso, determine a probabilidade de uma das diagonais ficar só com peças brancas.

**10.** Uma turma de uma escola secundária tem 27 alunos: 15 raparigas e 12 rapazes.
O delegado de turma é um rapaz.
Pretende-se construir uma comissão para organizar um passeio. A comissão deve ser formada por 4 raparigas e 3 rapazes. Acordou-se que um dos 3 rapazes da comissão será necessariamente o delegado de turma.

**a)** Quantas comissões diferentes se podem constituir?

**b)** Admita que os 7 membros da comissão, depois de constituída, vão posar para uma fotografia, colocando-se uns ao lado dos outros.
Supondo que eles se colocam ao acaso, qual é a probabilidade de as raparigas ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

**11.** Sabe-se que com determinado medicamento se alcançou 70% de curas para certa doença, quando o mesmo é receitado a pacientes em condições bem definidas.
Se o medicamento for receitado a 12 doentes nessas condições, qual a probabilidade de se obter:

**a)** exactamente 8 curas?

**b)** pelo menos 11 curas?

**12.** Num armazém estão preparados, para distribuição, 1000 brinquedos. Destes, 100 têm defeito.
É efectuada uma inspecção sobre uma amostra de 10 brinquedos escolhidos ao acaso, com reposição.
Se na amostra só forem permitidos, no máximo, três brinquedos com defeito, qual é a probabilidade da inspecção não rejeitar a distribuição dos brinquedos armazenados?

**13.** Num saco estão 2 bolas vermelhas, 6 azuis e 4 amarelas. Retiram-se ao acaso e sucessivamente, sem reposição, 3 bolas. Qual é a probabilidade de serem todas da mesma cor?

**14.** Dispõe-se de 40 metros de rede para vedar um terreno em forma rectangular à beira de um rio (só três lados). Determine as dimensões do terreno e a posição da vedação para que a área seja máxima.

**15.** Considere a função real de variável real: $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2 - x}$.

**a)** Indique o domínio da função e determine as coordenadas dos pontos de intersecção do gráfico da mesma com os eixos coordenados, caso existam.

**b)** Determine as assimptotas do gráfico da função.

**c)** Mostre que $f'(x) = \dfrac{-x^2 + 4x - 1}{(2x^2 - x)^2}$.

Elabore um quadro onde figure o sentido de variação e extremos relativos da função. (não os calcule)

**d)** Escreva a equação reduzida da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa $x = -1$.

## SOLUÇÕES

# 1.ª Parte

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** C | **6.** D | **11.** C | **16.** A - B | **21.** B |
| **2.** C | **7.** A | **12.** B | **17.** B | **22.** C |
| **3.** D | **8.** C | **13.** D | **18.** D | **23.** A |
| **4.** B | **9.** B | **14.** C | **19.** B | **24.** D |
| **5.** A | **10.** D | **15.** D - C | **20.** A | **25.** B |

# 2.ª Parte

**1.**

**a)** 120.

**b)** 12.

**c)** 36.

**2.**

**a)** $p = \dfrac{15}{36} = \dfrac{5}{12}$.

**b)** $p(x = 4) = C_4^6 (\frac{5}{12})^4 (\frac{7}{12})^2 = \dfrac{153125}{995328} \approx 0{,}154$.

**3.**

**a1)** Os acontecimentos são independentes e como a extracção é feita com reposição, temos: $p(V) = \dfrac{2}{9}$; $p(A) = \dfrac{1}{3}$; $p(R) = \dfrac{4}{9}$. A probabilidade pedida é $p(V \cap A \cap R) = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{1}{3} \times \dfrac{4}{9} = \dfrac{8}{243}$.

**a2)** Existem $P_3 = 3! = 6$ maneiras diferentes de ocorrer o acontecimento pedido e todas de igual probabilidade $p = \dfrac{8}{243}$. Portanto, a probabilidade pedida é $p(pedida) = 6 \times \dfrac{8}{243} = \dfrac{16}{81}$.

**b1)** Como agora a extracção é sem reposição, os acontecimentos V, A e R não são independentes, pelo que $p(V) = \dfrac{2}{9}$, $p(A/V) = \dfrac{3}{8}$ e $p(R/(V \cap A)) = \dfrac{4}{7}$. Logo, a probabilidade pedida é $p = \dfrac{2}{9} \times \dfrac{3}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{1}{21}$.

**b2)** Tal como em a2), existem 6 maneiras diferentes de obter 3 bolas de cores diferentes e todas com igual probabilidade: $\frac{1}{21}$. Logo, a probabilidade pedida é $p = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

**4.**

**a)** É de notar que os acontecimentos não são equiprováveis.
A probabilidade pedida é $p(\text{sair par}) = p(\text{sair } 4) + p(\text{sair } 2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} = \frac{5}{12}$.

**b)** É uma situação de provas repetidas, sendo $p = p(\text{sair } 3) = \frac{1}{4}$ e $q = 1 - p = \frac{3}{4}$.

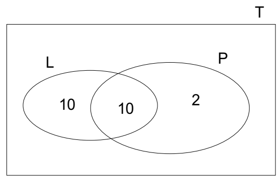
Logo, $p(k \geq 4) = p(k = 4) + p(k = 5) = {}^5C_4 p^4 q^1 + {}^5C_5 p^5 q^0 = 5 \times (\frac{1}{4})^4 \times \frac{3}{4} + 1 \times (\frac{1}{4})^5 \times 1 = \frac{15+1}{4^5} = \frac{4^2}{4^5} = \frac{1}{4^3} = \frac{1}{64}$.

**5.**

**a)** Como $p(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1$ e dado que $p(6) = 0{,}4$ e que os restantes acontecimentos são equiprováveis, será $p(1) = p(2) = p(3) = p(4) = p(5) = \frac{1 - p(6)}{5} = 0{,}12$. Logo, $p(1) = 12\%$.

**b)** $p(\acute{\imath}mpar) = p(1) + p(3) + p(5) = 0{,}36$;
$p(par) = p(2) + p(4) + p(6) = 0{,}64$;
A probabilidade pedida é $p(k = 2) = C_2^5 \times 0{,}36^2 \times 0{,}64^3 = 0{,}34$.

**6.**




**a)** A turma é constituída por 22 alunos, visto:
$\#T = \#L + \#P - \#(L \cap P) = 20 - 12 - 10 = 22$.

**b)** Como não interessa a ordem como essa comissão é constituída e os seus elementos são distintos, essa comissão pode ser constituída de $C_2^{22} = 231$ maneiras distintas.

**c)** $NCP = 231$ e $NCF = C_2^{10} + C_2^{10} + C_2^2 + C_1^{10} \times C_1^{10} + C_1^{10} \times C_1^2 = 211$. Logo, $p = \frac{211}{231}$.

Ou, dado que o número de casos desfavoráveis é $C_1^2 \times C_1^{10} = 20$, será $p = 1 - \frac{20}{231} = \frac{211}{231}$.

**7.**

**a)** Os elementos da equipa serão distintos e não interessa a ordem de constituição. Logo, é possível constituir $C_4^{10} = 210$ equipas distintas.

**b)** É possível organizar a equipa de $P_3 = 6$ maneiras distintas.

**c)** Como $NCP = A_6^8$ e $NCF = A_5^6$, a probabilidade é $p = \frac{1}{28}$.

**8.**

**a)** Fixadas as 5 quadrículas a cheio, resta distribuir 4 que podem ocupar 4 dos 20 quadrados livres.
Como não interessa a ordem nem pode haver repetição, o número de quadros diferentes será dado por
$C_4^{20} = \frac{20!}{4! \times 16!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{24} = 4845$, como queríamos mostrar.

**b)** Permanecendo com as cinco quadrículas a cheio fixadas, observamos que existem duas hipóteses: uma é aquela em que a diagonal está inclinada à esquerda, a outra com a diagonal inclinada à direita.
Para constituir a diagonal, fixemos mais duas quadrículas a cheio. Restam-nos, então, 2 que podem ocupar dois dos 18 quadrados livres. Isto é, $C_2^{18} = 153$ possibilidades diferentes. Fazendo igual raciocínio para o caso da outra diagonal, obtemos igual valor.
Mas, repare-se que um dos quadros foi contado duas vezes: o quadro com as duas diagonais preenchidas.

Logo, a probabilidade pedida é: $p = \frac{2 \times C_2^{18} - 1}{4845} = \frac{305}{4845} = 0{,}06$ (2 c.d.).

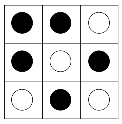
**9.**

**a)** Admitamos que começamos por colocar as peças pretas.
Como não interessa a ordem e não pode haver repetição, a colocação destas peças no tabuleiro pode originar
$C_5^9 = \frac{9!}{5! \times 4!} = \frac{9 \times 8 \times 7 \times 6}{4 \times 3 \times 2} = 126$ disposições diferentes.
É evidente que após a colocação das 5 peças pretas, restam apenas 4 casas para as 4 peças brancas.

Portanto, existem 126 maneiras diferentes de as peças ficarem colocadas no tabuleiro.

NOTA: Igual conclusão é tirada se começarmos por colocar as peças brancas.

**b)** Se repararmos na figura, podemos concluir que não é possível uma configuração em que as brancas ocupem as duas diagonais em simultâneo.
Para que as brancas ocupem a diagonal assinalada na figura, a quarta peça branca pode ocupar 6 casas e as pretas ocuparão as restantes. Isto é, apenas há seis casos favoráveis à ocorrência da diagonal assinalada.
Se considerarmos a outra diagonal, há igual número de disposições diferentes.



Portanto, a probabilidade pedida é $p = \frac{12}{126} = 0{,}095$ (3 c.d.).

**10.**

**a)** Uma comissão é um conjunto formado por quatro raparigas e três rapazes, sendo um destes o delegado de turma. O número de comissões é, então, o número de maneiras de reunir quatro raparigas, escolhidas de entre quinze, com dois rapazes, escolhidos de entre onze.

O número total de comissões é, portanto, $C_4^{15} \times C_2^{11} = 75075$ .

**b)** A probabilidade pedida pode ser obtida por, pelo menos, três processos diferentes, consoante o modelo adoptado para formar e espaço de acontecimentos.

*1.º Processo*: O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras dos sete membros da comissão se disporem em fila uns ao lado dos outros. Assim, $p = \frac{4 \times 4! \times 3!}{7!} \approx 0{,}114$ .

2.*º Processo*: O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras as raparigas ocuparem quatro dos sete lugares da fila. Assim, $p = \frac{4 \times 4!}{A_4^7} \approx 0{,}114$ .

3.*º Processo*: O espaço de acontecimentos é o conjunto de maneiras de escolher quatro de sete lugares (os lugares onde ficam as raparigas). Assim, $p = \frac{4}{C_4^7} \approx 0{,}114$ .

**11.**

**a)** $\approx 0{,}2311$ .

**b)** $\approx 0{,}085$

**12.** $\approx 0{,}9872$

**13.** $\frac{6}{55}$

**14.** $A(x) = 40x - 2x^2$ ; $A'(x) = 40 - 4x$ ;
A área é máxima para um comprimento ao longo do rio de 20 m e uma largura de 10 m.

**15.**

**a)** O domínio da função é $IR \setminus \{0, \frac{1}{2}\}$ .

Os pontos de intersecção do gráfico com os eixos são: A (-1, 0) e B (1, 0).

**b)** As rectas de equação $x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$ são assimptotas verticais bilaterais; a recta de equação $y = \frac{1}{2}$ é uma assimptota horizontal bilateral.

**c)** A função é decrescente em: $]-\infty, 0[$ , em $]0, 2-\sqrt{3}[$ e em $]2+\sqrt{3}, +\infty[$;
A função é crescente em: $]2-\sqrt{3}, \frac{1}{2}[$ e em $]\frac{1}{2}, 2+\sqrt{3}[$;

$2-\sqrt{3}$ é um minimizante e $2+\sqrt{3}$ é um maximizante.

**d)** $y = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$ é a equação reduzida da recta tangente ao gráfico no ponto de abcissa 1.

*O Professor*