

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2011/12

Probabilidade condicionada; acontecimentos independentes

12.º Ano

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1. Demonstre que se A e B são acontecimentos independentes, também são independentes \bar{A} e \bar{B} .

Sugestão: Se A e B são independentes, então $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B)$. Pretende-se demonstrar que $p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A}) \cdot p(\bar{B})$.

2. Estude a dependência dos acontecimentos M e N , sabendo que:

- a) $p(M) \neq 0$; $p(N) \neq 0$ e M e N são incompatíveis;
- b) $p(M) \neq 0$ e $M \subset N$;
- c) $p(N) = 0$ e M é um acontecimento qualquer.

3. Um casal tem três filhos e sejam os acontecimentos:

- **A:** "o casal tem no máximo uma rapariga"
- **B:** "o casal tem filhos de ambos os sexos"

Calcule $p(A)$, $p(B)$ e $p(A \cap B)$, e verifique se A e B são acontecimentos independentes.

4. A Luísa tem duas moedas no bolso, uma viciada e outra normal. Na moeda viciada a probabilidade de sair cara é $\frac{3}{4}$.

A Luísa tira uma moeda do bolso aleatoriamente, atira-a ao ar e verifica que sai cara. Determine a probabilidade de ela ter tirado do bolso a moeda viciada.

5. Tenho duas caixas iguais. A caixa **A** tem 10 rebuçados de mentol e 20 de limão, enquanto a **B** tem 20 de mentol e 10 de limão. Peguei numa das caixas e tirei ao acaso um rebuçado. Era de mentol. Qual é a probabilidade de ter escolhido a caixa **A**?

6. Os centros de transfusão sanguínea publicaram o quadro ao lado com a distribuição dos principais grupos sanguíneos no ano de 1997 num dado país. Sabe-se que o sangue de qualquer ser humano possui uma determinada característica chamada factor Rhésius (RH). Esta característica pode tomar duas formas: RH positivo (RH^+) ou RH negativo (RH^-). (Estas características não variam com o sexo)

Considerando um casal ao acaso, determine a probabilidade de que:

- a) O homem seja R^+ e a mulher R^- .
- b) O homem seja $[OR^+]$ e a mulher $[AR^+]$.
- c) O homem seja R^- e a mulher R^- .
- d) O homem seja $[BR^-]$ e a mulher $[BR^+]$.
- e) Sabendo que um indivíduo tem sangue tipo A, ter R^- .

	O	A	B	AB
R^+	37,0%	38,1%	6,2%	2,8%
R^-	7,0%	7,2%	1,2%	0,5%

7. Um estudante realiza dois exames no mesmo dia. A probabilidade de que fique aprovado no primeiro exame é de 0,7 e a probabilidade de que passe no segundo é 0,6 e a de que aprove em ambos é de 0,4.

a) Calcule:

a1) a probabilidade de que fique aprovado em, pelo menos, um exame;

b2) a probabilidade de que não fique aprovado em nenhum.

b) Serão as provas independentes?

c) Determine a probabilidade de que passe no segundo exame, no caso de ter reprovado no primeiro.

8. Um saco contém seis bolas, numeradas de 1 a 6.

As bolas que têm números pares estão pintadas de verde.

As bolas que têm números ímpares estão pintadas de azul.

Extraem-se, aleatoriamente, e de uma só vez, duas bolas do saco.

Sejam A e B os seguintes acontecimentos:

- A: "As duas bolas são da mesma cor."
- B: "O produto dos números das bolas é ímpar."

a) Determine $p(A)$. Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b) Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $p(A | B)$.

9. Considere:

- uma caixa com seis bolas, todas brancas;
- seis bolas pretas, fora da caixa;
- um dado equilibrado, com as faces numeradas de 1 a 6.

Lança-se duas vezes o dado.

Tiram-se, da caixa, tantas bolas brancas quantas o número saído no primeiro lançamento. Colocam-se, na caixa, tantas bolas pretas quantas o número saído no segundo lançamento.

a) Qual é a probabilidade de a caixa ficar com seis bolas? Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

b) Sejam A e B os acontecimentos:

A - «Sai face 5 no primeiro lançamento do dado.»

B - «Ficam, na caixa, menos bolas brancas do que pretas.»

Indique, justificando, o valor da probabilidade condicionada $p(B | A)$.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível,

10. Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: Espadas, Copas, Ouros e Paus. Cada naipe tem **três figuras**: Rei, Dama e Valete.

a) Retirando, ao acaso, seis cartas de um baralho completo, qual é a probabilidade de, entre elas, haver um e um só Rei? Apresente o resultado na forma de dízima, com aproximação às milésimas.

b) De um baralho completo extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Sejam E_1 , C_2 e F_2 os acontecimentos:

E_1 : sair Espadas na primeira extração;

C_2 : sair Copas na segunda extração;

F_2 : sair uma figura na segunda extração.

Sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada, indique o valor de $p((F_2 \cap C_2) | E_1)$. Numa pequena composição, com cerca de dez linhas, explicito o raciocínio que efetuou. O valor pedido deverá resultar apenas da interpretação do significado de $p((F_2 \cap C_2) | E_1)$, no contexto da situação descrita.

11. Uma turma do 12.^o ano é constituída por vinte e cinco alunos (quinze raparigas e dez rapazes). Nessa turma, vai ser escolhida uma comissão para organizar uma viagem de finalistas.

A comissão será formada por três pessoas: um **presidente**, um **tesoureiro** e um responsável pelas **relações públicas**.

- a) Se o delegado de turma tivesse obrigatoriamente de fazer parte da comissão, podendo ocupar qualquer um dos três cargos, quantas comissões distintas poderiam ser formadas?
- b) Admita agora que o delegado de turma pode, ou não, fazer parte da comissão.

b1) Quantas comissões mistas distintas podem ser formadas?

Nota: Entenda-se por comissão mista uma comissão constituída por jovens que não são todos do mesmo sexo.

b2) Suponha que a escolha dos três elementos vai ser feita por sorteio, da seguinte forma.

Cada aluno escreve o seu nome numa folha de papel. As vinte e cinco folhas são dobradas e introduzidas num saco. Em seguida, retiram-se do saco, sucessivamente, três folhas de papel. O primeiro nome a sair corresponde ao do presidente, o segundo, ao do tesoureiro, e o terceiro, ao do responsável pelas relações públicas.

Sejam A, E e C os acontecimentos:

A: «o presidente é uma rapariga»;

E: «o tesoureiro é uma rapariga»;

C: «a comissão é formada só por raparigas».

Indique o valor da probabilidade condicionada $p(C | (A \cap B))$ e, numa pequena composição, com cerca de dez linhas, justifique a sua resposta.

Nota: Não aplique a fórmula da probabilidade condicionada. O valor pedido deverá resultar exclusivamente da interpretação de $p(C | (A \cap B))$, no contexto do problema.

12. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória. Sejam E_1 e E_2 dois acontecimentos possíveis ($E_1 \subset S$ e $E_2 \subset S$).

a) Prove que $p(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) = 1 - p(E_1) \times p(E_2 | E_1)$.

b) Um baralho de cartas completo é constituído por cinquenta e duas cartas, repartidas por quatro naipes de treze cartas cada: espadas, copas, ouros e paus.

De um baralho completo extraem-se, sucessivamente e sem reposição, duas cartas.

Qual é a probabilidade de pelo menos uma das cartas extraídas não ser do naipe de espadas?

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida na alínea anterior; neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos E_1 e E_2 , no contexto da situação apresentada.

c) Num certo jogo de cartas, utiliza-se um baralho completo e dão-se treze cartas a cada jogador.

Imagine que está a participar nesse jogo.

Qual é a probabilidade de, nas treze cartas que vai receber, haver exactamente seis cartas do naipe de espadas? Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

13. Seja S o espaço de resultados associado a uma experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabendo que A e B são independentes, prove que:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) \times p(\overline{A})$$

14. Uma caixa contém cinco bolas brancas e cinco bolas pretas, indistinguíveis ao tacto.

Tiram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas da caixa.

Considere os seguintes acontecimentos:

B_1 - a bola retirada em primeiro lugar é branca;

B_2 - a bola retirada em segundo lugar é branca.

Qual é o valor da probabilidade condicionada $p(B_2 | B_1)$?

[A] $\frac{1}{2} \times \frac{4}{9}$

[B] $\frac{1}{2} \times \frac{5}{9}$

[C] $\frac{4}{9}$

[D] $\frac{5}{9}$

SOLUÇÕES

2.

- a) São dependentes.
- b) Só serão independentes se N for o conjunto de resultados, isto é, se $p(N) = 1$.
- c) São independentes.

3. $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ e $\frac{3}{8}$.

Os acontecimentos são independentes.

4. $\frac{3}{5}$.

5. $\frac{1}{3}$

6.

- a) $0,841 \times 0,159 \approx 0,134$
- b) $0,37 \times 0,381 \approx 0,141$
- c) $0,159 \times 0,159 \approx 0,0253$
- d) $0,012 \times 0,062 \approx 0,00074$
- e) $0,072 \div 0,453 \approx 0,159$

7.

- a1) 0,9
- a2) 0,1
- b) Não, visto $p(E_1 \cap E_2) \neq p(E_1) \cdot p(E_2)$.
- c) $\frac{2}{3}$

8.

- a) $\frac{2}{5}$
- b) $p(A | B) = 1$

9.

- a) $\frac{1}{6}$
- b) $p(B | A) = \frac{5}{6}$

10.

- a) 0,336
- b) $p((F_2 \cap C_2) | E_1) = \frac{3}{51}$

11.

- a) 1.656
- b) 10.350
- c) $p(C | (A \cap B)) = \frac{13}{23}$

12.

- b) $\frac{16}{17}$
- c) 4%

14. [C]

O Professor

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2011/12

Probabilidade condicionada; acontecimentos independentes

12.º Ano

Proposta de Resolução:

1. Aceitando a sugestão, temos:

$$\begin{aligned} p(\overline{A \cap B}) &= p(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - p(A \cup B) \\ &= 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B) \\ &= 1 - p(A) - p(B) + p(A) \cdot p(B) \text{ , pois, por hipótese, A e B são acontecimentos independentes} \\ &= (1 - p(A)) \times (1 - p(B)) \\ &= p(\overline{A}) \cdot p(\overline{B}) \end{aligned}$$

2.

a) Ora, $p(M \cap N) = p(\emptyset) = 0$, pois M e N são acontecimentos incompatíveis.

Por definição de probabilidade condicionada, temos

$$p(N/M) = \frac{p(N \cap M)}{p(M)} = \frac{p(\emptyset)}{p(M)} = \frac{0}{p(M)} = 0 \text{ (por hipótese } p(M) \neq 0 \text{ e } p(N) \neq 0 \text{)}.$$

Logo, sendo $p(N/M) \neq p(N)$, os acontecimentos são dependentes.

b) Como $M \subset N$, então $M \cap N = M$.

Logo, $p(M \cap N) = p(M) \neq 0$, pois por hipótese é $p(M) \neq 0$.

$$\text{Por outro lado, } p(N/M) = \frac{p(N \cap M)}{p(M)} = \frac{p(M)}{p(M)} = 1 \text{ (} p(M) \neq 0 \text{)}.$$

Portanto, os acontecimentos M e N apenas serão independentes se $p(N) = 1$, isto é, se N for o espaço de resultados (Ω).

c) Se $p(N) = 0$, então $N = \emptyset$.

Assim, $p(N \cap M) = p(\emptyset) = 0 = p(N) \cdot p(M)$, pois $p(N) = 0$.

Logo, os acontecimentos M e N são independentes.

3. Definindo os acontecimentos A e B e o conjunto de resultados, temos:

$$\Omega = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M), (F, F, F)\}$$

$$A = \{(M, M, M), (M, M, F), (M, F, M), (F, M, M)\}$$

$$B = \{(M, M, F), (M, F, M), (M, F, F), (F, M, M), (F, M, F), (F, F, M)\}$$

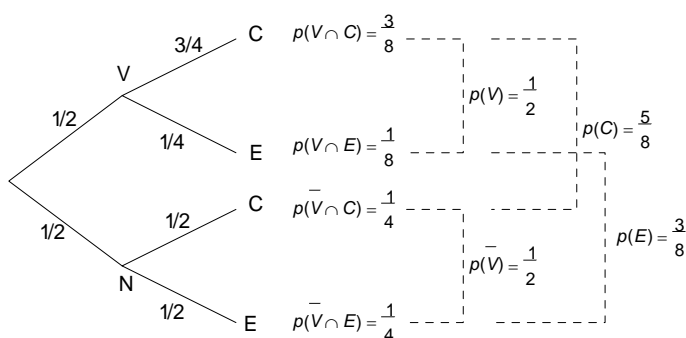
$$\text{Logo, } p(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, \quad p(B) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \text{ e } p(A \cap B) = p(\{(M, M, F), (M, F, M), (F, M, M)\}) = \frac{3}{8}.$$

$$\text{Ora, } p(A) \cdot p(B) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} = p(A \cap B), \text{ logo os acontecimentos A e B são independentes.}$$

4. Sabe-se que $p(C/V) = \frac{3}{4}$. Pretende-se descobrir $p(V/C)$ (Porquê?).

Ora, (acompanhe o raciocínio com o diagrama ao lado)

$$\begin{aligned} p(V/C) &= \frac{p(V \cap C)}{p(C)} \\ &= \frac{p(V) \cdot p(C/V)}{p(V \cap C) + p(V \cap \overline{C})} \\ &= \frac{p(V) \cdot p(C/V)}{p(V) \cdot p(C/V) + p(V) \cdot p(\overline{C}/V)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4}}{\frac{1}{2} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\frac{3}{8}}{\frac{3}{8} + \frac{2}{8}} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$



5. Pretende-se determinar $p(A/M)$ (Porquê?). (Faça um diagrama!)

$$\text{Ora, } p(A/M) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{p(A) \cdot p(M/A)}{p(A \cap M) + p(B \cap M)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}}{p(A) \cdot p(M/A) + p(B) \cdot p(M/B)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}.$$

6.

- a) $p(R^+ \cap R^-) = p(R^+) \cdot p(R^-) = 0,841 \times 0,159 \approx 0,134$.
- b) $p(OR^+ \cap AR^+) = p(OR^+) \cdot p(AR^+) = 0,37 \times 0,381 \approx 0,141$.
- c) $p(R^- \cap R^-) = p(R^-) \cdot p(R^-) = 0,159 \times 0,159 \approx 0,0253$.
- d) $p(BR^- \cap BR^+) = p(BR^-) \cdot p(BR^+) = 0,012 \times 0,062 \approx 0,00074$.
- e) $p(R^- / A) = \frac{p(R^- \cap A)}{P(A)} = \frac{0,072}{0,072 + 0,381} \approx 0,159$.

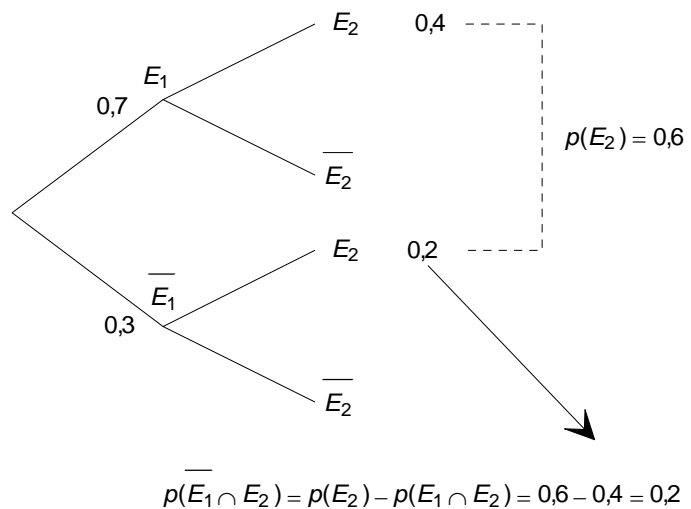
	0	A	B	AB	Total
R^+	37,0%	38,1%	6,2%	2,8%	84,1%
R^-	7,0%	7,2%	1,2%	0,5%	15,9%
Total	44,0%	45,3%	7,4%	3,3%	100,0%

7.

- a1) $p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = 0,7 + 0,6 - 0,4 = 0,9$.
- a2) $p(\overline{E_1} \cap \overline{E_2}) = p(\overline{E_1 \cup E_2}) = 1 - p(E_1 \cup E_2) = 1 - 0,9 = 0,1$.
- b) Ora, $p(E_1 \cap E_2) = 0,4$ e $p(E_1) \cdot p(E_2) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$.
Como $p(E_1 \cap E_2) \neq p(E_1) \cdot p(E_2)$, as provas não são independentes.
- c) Acompanhe a resolução pelo diagrama ou pela tabela, depois de os ter completado.

$$p(E_2 / \overline{E_1}) = \frac{p(E_2 \cap \overline{E_1})}{P(\overline{E_1})} = \frac{0,2}{0,3} = \frac{2}{3}. \text{ Note que } p(\overline{E_1} \cap E_2) = p(E_2) - p(E_1 \cap E_2) = 0,6 - 0,4 = 0,2.$$

	E_1	$\overline{E_1}$	
E_2	0,4	0,2	0,6
$\overline{E_2}$	0,3	0,1	0,4
	0,7	0,3	1



8.

a) Ora, $p(A) = p(VV \cup AA) = \frac{{}^3C_2 + {}^3C_2}{{}^6C_2} = \frac{2 \times {}^3C_2}{{}^6C_2} = \frac{2 \times 3}{15} = \frac{2}{5}$.

- b) $p(A | B) = 1$ visto que, se o produto dos números é ímpar, ambas as bolas têm números ímpares, pelo que são ambas azuis, sendo assim, da mesma cor.

9.

- a) Para que a caixa fique com 6 bolas, o número saído no dado no primeiro lançamento tem de ser igual ao saído no segundo lançamento. Portanto, dos 36 resultados possíveis, apenas 6 são favoráveis. Logo, $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

- b) $p(B | A) = \frac{5}{6}$, pois $p(B | A)$ designa a probabilidade de ficarem na caixa menos bolas brancas do que pretas, sabendo que saiu a face 5 no primeiro lançamento. Ora, tendo saído a face 5 no primeiro lançamento, ficou apenas uma bola branca na caixa. Para que fiquem, na caixa, menos bolas brancas do que pretas, terá de sair face 2, 3, 4, 5 ou 6 no segundo lançamento.

10.

- a) Como cada acontecimento favorável é constituído por um Rei (escolhido entre 4 possíveis) mais 5 cartas, qualquer uma delas diferente de Rei (escolhidas, portanto, de entre 48 possíveis), vem:

$$p = \frac{{}^4C_1 \times {}^{48}C_5 + {}^4C_1 \times {}^{48}C_5 + {}^4C_1 \times {}^{48}C_5 + {}^4C_1 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6} = \frac{4 \times {}^{48}C_5}{{}^{52}C_6} \approx 0,336.$$

- b) $p((F_2 \cap C_2) | E_1)$ significa «probabilidade de sair figura de copas na segunda extracção, sabendo que saiu uma carta de espadas na primeira extracção».

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 51 (número de cartas existentes no baralho, após a extracção da primeira carta).

O número de casos favoráveis é 3 (número de figuras de copas existentes no baralho, após a extracção da primeira carta, a qual, por ser de espadas, não é figura de copas).

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $p((F_2 \cap C_2) | E_1) = \frac{3}{51}$.

11.

- a) Podem ser formadas $N = 3 \times {}^{24}A_2 = {}^3C_1 \times {}^{24}C_2 \times P_2 = 1656$ comissões distintas, dado que o delegado pode ocupar qualquer um dos três cargos e os restantes dois elementos podem ser escolhidos de um grupo de 24 alunos, sendo depois possível a permutação dos dois cargos disponíveis entre si.

- b1) Se as comissões são mistas, então participam dois rapazes e uma rapariga ou duas raparigas e um rapaz.

Logo, podem obter-se $N' = \underbrace{({}^{15}C_1 \times {}^{10}C_2) \times P_3}_{1 \text{ rapariga e 2 rapazes}} + \underbrace{({}^{10}C_1 \times {}^{15}C_2) \times P_3}_{1 \text{ rapaz e 2 raparigas}} = 3 \times 15 \times {}^{10}A_2 + 3 \times 10 \times {}^{15}A_2 = 10350$

comissões mistas distintas.

- b2) $p(C | (A \cap B))$ significa «probabilidade de a comissão ser formada só por raparigas, sabendo que, para presidente e para tesoureiro, foram sorteadas duas raparigas».

Tem-se, assim, que:

O número de casos possíveis é 23 (número de alunos que restam, após o sorteio para os cargos de presidente e tesoureiro).

O número de casos favoráveis é 13 (número de raparigas que restam, após o sorteio para os cargos de presidente e tesoureiro).

A probabilidade pedida é, por aplicação da regra de Laplace, $p(C | (A \cap B)) = \frac{13}{23}$.

12.

- a)

$$\begin{aligned} p(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) &= p(\overline{E_2 \cap E_1}) \\ &= 1 - p(E_2 \cap E_1) \\ &= 1 - p(E_1) \times (E_2 | E_1) \end{aligned}$$

- b) Sejam E_1 e E_2 os seguintes acontecimentos:

E_1 : "Sair espadas na primeira extracção"

E_2 : "Sair espadas na segunda extracção"

Ora, dado que $\overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ equivale a "pelo menos uma das cartas extraídas não é do naipe de espadas", temos:

$$\begin{aligned} p(\overline{E_1} \cup \overline{E_2}) &= 1 - p(E_1) \times p(E_2 | E_1) \\ &= 1 - \frac{13}{52} \times \frac{12}{51} \\ &= 1 - \frac{1}{4} \times \frac{4}{17} \\ &= 1 - \frac{1}{17} \\ &= \frac{16}{17} \end{aligned}$$

- c) Uma mão de 13 cartas pode ser obtida de ${}^{52}C_{13}$ maneiras distintas, já que não interessa a ordem da distribuição das cartas nem tão pouco pode haver repetição das mesmas. Ora, as seis cartas do naipe de espadas podem ser escolhidas de ${}^{13}C_6$ maneiras distintas de entre as 13 cartas desse naipe. As restantes 7 cartas podem ser escolhidas de ${}^{39}C_7$ maneiras distintas de entre as cartas dos outros três naipes.

Logo, a probabilidade pedida é $p = \frac{{}^{13}C_6 \times {}^{39}C_7}{{}^{52}C_{13}} \approx 4\%$.

13.

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - P(A \cap B) \\ &= p(A) + p(B) - P(A) \times p(B) \text{ , pois A e B são independentes} \\ &= p(A) + p(B) \times (1 - p(A)) \\ &= p(A) + p(B) \times p(\bar{A}) \end{aligned}$$

$$14. \text{ Ora, } p(B_2 | B_1) = \frac{p(B_1 \cap B_2)}{p(B_1)} = \frac{\frac{5 \times 4}{10 \times 9}}{\frac{5}{10}} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{9} \times 2 = \frac{4}{9} .$$

Ou, melhor ainda: Se a primeira bola extraída é branca, restam 9 bolas na caixa, das quais apenas 4 são brancas.

Logo, na segunda extracção, a probabilidade de extrair uma bola branca é de 4 em 9, isto é, $\frac{4}{9}$.