

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2011/12

Definição axiomática e propriedades das probabilidades

12.º Ano

Nome: _____ N.º: ____ Turma: ____

1.

- a) Enuncie uma axiomática para as probabilidades.
b) Demonstre que, para quaisquer acontecimentos A e B,

b1) $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$;

b2) $p(A) + p(B) + p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 + p(A \cap B)$;

2. Demonstre que:

a) $p(A/B) + p(\bar{A}/B) = 1$;

b) $p[(A \cup B)/C] = p(A/C) + p(B/C) - p[(A \cap B)/C]$.

c) $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p[C/(A \cap B)]$.

3. Acerca dos acontecimentos A, B e C, sabe-se que $p(A) = 0,2$, $p(B) = 0,5$ e $p(C) = 0,3$.

- a) Mostre que $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$.
b) Calcule $p(A \cup B \cup C)$ admitindo que A, B e C são acontecimentos independentes.

4. Mostre que se A e B são dois acontecimentos, se tem: $p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$.

5. Seja S o conjunto de resultados associado a uma experiência aleatória.
Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S).

Prove que: $p(A) + p(B) + p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 + p(A \cap B)$

6. Num saco existem quinze bolas, indistinguíveis ao tato.
Cinco bolas são amarelas, cinco são verdes e cinco são brancas. Para cada uma das cores, as bolas estão numeradas de 1 a 5.

- a) Retirando todas as bolas do saco e dispondo-as, ao acaso, numa fila, qual é a probabilidade de as bolas da mesma cor ficarem todas juntas?
Apresente o resultado na forma de dízima, com sete casas decimais.
- b) Suponha agora que, no saco, estão apenas algumas das quinze bolas.
Nestas novas condições, admita que, ao retirarmos, ao acaso, uma bola do saco, se tem:
- a probabilidade de essa bola ser amarela é 50 %
 - a probabilidade de essa bola ter o número 1 é 25 %
 - a probabilidade de essa bola ser amarela ou ter o número 1 é 62,5%

Prove que a bola amarela número 1 está dentro do saco.

7. Seja S o conjunto de resultados (com número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos (A e B são, portanto, subconjuntos de S). Sabe-se que:

- $p(A) = 2p(B)$
- $p(A \cup B) = 3p(B)$

Prove que os acontecimentos A e B são incompatíveis.

8. Seja S o conjunto de resultados (com número finito de elementos) associado a uma certa experiência aleatória. Sejam A e B dois acontecimentos, contidos em S , nenhum deles impossível, nem certo. Sabe-se que $A \subset B$.

Indique qual das afirmações seguintes é verdadeira:

- [A] $p(A) > p(B)$ [B] $p(A \cap B) = 0$ [C] $p(A \cup B) = 1$ [D] $p(\bar{A}) \geq p(\bar{B})$

9. Nos jogos de futebol entre a equipa X e a equipa Y, a estatística revela que:

- em 20% dos jogos, a equipa X é a primeira a marcar;
- em 50% dos jogos, a equipa Y é a primeira a marcar.

Qual é a probabilidade de, num jogo entre a equipa X e a equipa Y, não se marcarem golos?

- [A] 10% [B] 25% [C] 30% [D] 35%

10. Lança-se um dado até sair face 6.

A probabilidade de serem necessários pelo menos dois lançamentos é

- [A] $\frac{1}{6}$ [B] $\frac{1}{3}$ [C] $\frac{2}{3}$ [D] $\frac{5}{6}$

SOLUÇÕES

3. 9. [C]
b) 0,72 10. [D]
8. [D]

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2011/12

Definição axiomática e propriedades das probabilidades

12.º Ano

Proposta de Resolução:

1.

- a) Seja Ω um espaço de resultados, finito, e \mathcal{W} uma família de subconjuntos de Ω . A cada acontecimento A pertencente a \mathcal{W} podemos associar um número a que chamamos probabilidade de A e designamos por $p(A)$, tal que:

1- Qualquer que seja A , $p(A) \geq 0$.

2- $p(\Omega) = 1$.

3- Se A e B são acontecimentos incompatíveis ($A \cap B = \emptyset$), então $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.

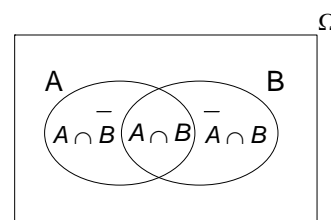
- b1) Considerando o diagrama ao lado, temos $B = (A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)$.

Assim,

$$\begin{aligned} p(B) &= p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) \\ &= p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) \end{aligned}$$

pois $(A \cap B)$ e $(\bar{A} \cap B)$ são disjuntos.

Portanto, $p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$.



- b2) Sabendo que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$ e considerando ser $\Omega = (A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})$, vem

$$\begin{aligned} p(\Omega) &= p((A \cup B) \cup (\bar{A} \cap \bar{B})) \Leftrightarrow 1 = p(A \cup B) + p(\bar{A} \cap \bar{B}), \text{ pelos axiomas 2 e 3} \\ &\Leftrightarrow 1 = p(A) + p(B) - p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap \bar{B}) \\ &\Leftrightarrow p(A) + p(B) + p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 + p(A \cap B) \end{aligned}$$

Portanto, $p(A) + p(B) + p(\bar{A} \cap \bar{B}) = 1 + p(A \cap B)$.

2.

- a) Sabendo que são disjuntos $(A \cap B)$ e $(\bar{A} \cap B)$, então $p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B)) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)$, pelo 3.º axioma. Considerando ainda $p(B) > 0$, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} p(A/B) + p(\bar{A}/B) &= \frac{p(A \cap B)}{p(B)} + \frac{p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B)}{p(B)} \\ &= \frac{p((A \cap B) \cup (\bar{A} \cap B))}{p(B)} \\ &= \frac{p(B \cap (A \cup \bar{A}))}{p(B)} \\ &= \frac{p(B \cap \Omega)}{p(B)} \\ &= \frac{p(B)}{p(B)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

Logo, $p(A/B) + p(\bar{A}/B) = 1$.

- b) Sabendo que $p(M \cup N) = p(M) + p(N) - p(M \cap N)$ e por definição de probabilidade condicionada, vem sucessivamente:

$$\begin{aligned} p((A \cup B)/C) &= \frac{p((A \cup B) \cap C)}{p(C)} \\ &= \frac{p((A \cap C) \cup (B \cap C))}{p(C)}, \text{ pela propriedade distributiva} \\ &= \frac{p(A \cap C) + p(B \cap C) - p((A \cap C) \cap (B \cap C))}{p(C)} \\ &= \frac{p(A \cap C)}{p(C)} + \frac{p(B \cap C)}{p(C)} - \frac{p((A \cap B) \cap C)}{p(C)} \\ &= p(A/C) + p(B/C) - p((A \cap B)/C) \end{aligned}$$

Logo, $p[(A \cup B)/C] = p(A/C) + p(B/C) - p[(A \cap B)/C]$.

- c) Por definição de probabilidade condicionada e pela propriedade associativa da intersecção de conjuntos, vem:

$$\begin{aligned} p(A \cap B \cap C) &= p((A \cap B) \cap C) \\ &= p(A \cap B) \cdot p(C/(A \cap B)) \\ &= p(A) \cdot p(B/A) \cdot p(C/(A \cap B)) \end{aligned}$$

Logo, $p(A \cap B \cap C) = p(A) \cdot p(B/A) \cdot p[C/(A \cap B)]$.

3.

- a) Sabendo que $p(M \cup N) = p(M) + p(N) - p(M \cap N)$ e tendo em consideração propriedades operatórias entre conjuntos, temos sucessivamente:

$$\begin{aligned} p(A \cup B \cup C) &= p((A \cup B) \cup C) \\ &= p(A \cup B) + p(C) - p((A \cup B) \cap C) \\ &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) + p(C) - p((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

Logo, $p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$.

- b) Tendo em consideração que os acontecimentos são independentes, a relação da alínea anterior pode tomar a forma:

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A) \cdot p(B) - p(A) \cdot p(C) - p(B) \cdot p(C) + p(A) \cdot p(B) \cdot p(C)$$

Substituindo os valores dados, temos:

$$p(A \cup B \cup C) = 0,2 + 0,5 + 0,3 - 0,2 \times 0,5 - 0,2 \times 0,3 - 0,5 \times 0,3 + 0,2 \times 0,5 \times 0,3 = 0,72.$$

4.

Ora, $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$.

Dado que $p(B/A) \geq 0$, pelo axioma 1, e como $p(B/A) \leq 1$, então $p(A \cap B) \leq p(A)$ (1).

Por outro lado,

$$\begin{aligned} p(A \cup B) &= p(A) + p(B) - p(A \cap B) \\ &= p(A) + p(B) - p(B) \cdot p(A/B) \\ &= p(A) + p(B) \cdot (1 - p(A/B)) \end{aligned}$$

Ora, como $p(B) \geq 0$ e $0 \leq p(A/B) \leq 1$, então $p(B) \cdot (1 - p(A/B)) \geq 0$. Logo, $p(A \cup B) \geq p(A)$ (2).

Por (1) e (2), vem $p(A \cap B) \leq p(A) \leq p(A \cup B)$, cqm.

5.

Ora,

$$\begin{aligned} p(A) + p(B) + p(\overline{A \cap B}) &= p(A) + p(B) + p(\overline{A \cup B}) \\ &= p(A) + p(B) + 1 - p(A \cup B) \\ &= p(A) + p(B) + 1 - [p(A) + p(B) - p(A \cap B)] \\ &= p(A) + p(B) + 1 - p(A) - p(B) + p(A \cap B) \\ &= 1 + p(A \cap B) \end{aligned}$$

6.

a) A probabilidade pedida é $\frac{P_3 \times (P_5)^3}{P_{15}} = \frac{3! \times 5! \times 5! \times 5!}{15!} \approx 0,0000079$. (porquê?)

b) Designemos a probabilidade de «sair bola amarela» por $p(A)$ e a probabilidade de «sair bola com o número 1» por $p(B)$. Então, $p(A \cup B)$ designa a probabilidade de «sair bola amarela ou com o número 1» e $p(A \cap B)$ designa a probabilidade de «sair a bola amarela número 1».

Sabemos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$, donde $62,5\% = 50\% + 25\% - p(A \cap B)$.

Concluimos então que $p(A \cap B) = 12,5\%$.

Ora, sendo não nula a probabilidade de «sair a bola amarela número 1», tal significa que é possível retirar essa bola do saco, pelo que ela lá está.

7.

Sabemos que $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

Por hipótese, tem-se que $p(A) = 2p(B)$ e $p(A \cup B) = 3p(B)$.

Substituindo, obtém-se $3p(B) = 2p(B) + p(B) - p(A \cap B)$, donde $p(A \cap B) = 0$.

Portanto, A e B são incompatíveis, pois $A \cap B = \emptyset$, visto ser $p(A \cap B) = 0$.

8.

Sabemos que $p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0$, $p(A) \neq 1$ e $p(B) \neq 1$.

Como $A \subset B$, então $p(A) \leq p(B)$, donde $1 - p(\overline{A}) \leq 1 - p(\overline{B}) \Leftrightarrow p(\overline{A}) \geq p(\overline{B})$.

A alternativa [A] é falsa, pois se $A \subset B$ é $p(A) \leq p(B)$.

A alternativa [B] é falsa, pois se $A \subset B$ é $p(A \cap B) = p(A)$, logo não nula.

A alternativa [C] é falsa, pois se $A \subset B$ é $p(A \cup B) = p(B) \neq 1$.

9. Designemos a probabilidade de «a equipa X é a primeira a marcar» por $p(X)$ e a probabilidade de «a equipa Y é a primeira a marcar» por $p(Y)$, sendo então $p(X) = 0,2$ e $p(Y) = 0,5$.

A probabilidade de, num jogo entre a equipa X e a equipa Y, não se marcarem golos é dada por $p(\overline{X \cap Y})$.

Ora, $p(\overline{X \cap Y}) = p(\overline{X \cup Y}) = 1 - p(X \cup Y) = 1 - p(X) - p(Y) + p(X \cap Y) = 1 - 0,2 - 0,5 + 0 = 0,3 = 30\%$.

10. Designemos a probabilidade de «é necessário apenas 1 lançamento» por $p(A)$.

Ora, a probabilidade de «serem necessários pelo menos dois lançamentos» é $p(B) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.