Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo de 2003/04 ***Função composta e derivada da função composta*** **12.º Ano**

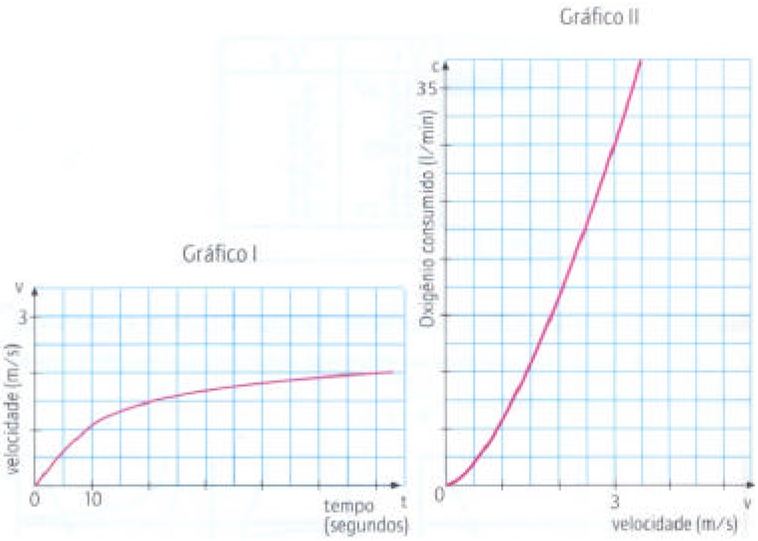
Nome: ____ N.º:____ Turma: ___

Função composta

1. O gráfico I dá-nos a velocidade *v* de um nadador em função do tempo *t*.
O gráfico II dá-nos o consumo *c* de oxigénio do nadador em função da sua velocidade *v*.
t é medido em segundos, *v* em metros por segundo e *c* em litros por minuto.

a) Recorrendo aos gráficos dados, determine o consumo de oxigénio do nadador após 20 segundos de natação.

b) Após quanto tempo de natação é o consumo de oxigénio igual a 15 l/min?



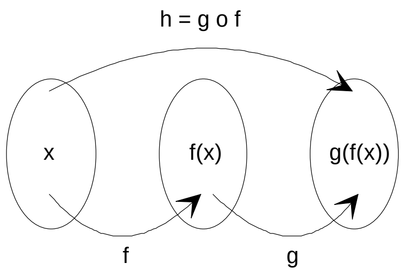
Há situações, como acontece no problema anterior, em que a solução resulta de usarmos uma imagem obtida por uma função, como original para outra função.

Este é um exemplo de como, a partir de duas funções *f* e *g* tais que *f*: $t \to v = f(t)$ e *g*: $v \to g(v)$ se pode construir uma nova função, cuja variável independente é o tempo *t* (variável independente de *f*) e cuja variável dependente é o consumo *c* (variável dependente de *g*), assim definida:

$$t \to c = g(f(t))$$

A expressão $g(f(t))$ lê-se "***g* de *f* de *t***", em que *t* representa qualquer elemento do domínio de *f* cuja imagem $f(t)$ pertence ao domínio de *g*.

Esquematizando



Diz-se, nestas condições, que ***h* é a função composta de *g* com *f*** e escreve-se $h = g \circ f$.

> Sendo *f* uma função de domínio D_f e *g* uma função de domínio D_g , chama-se **composta de *g* com *f*** à função $g \circ f$ assim definida:
>
> $$(g \circ f)(x) = g(f(x)),\ \forall x \in D_{g \circ f}$$
>
> $$D_{g \circ f} = \{x \in IR : x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$$

Exemplo

1. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x)=\dfrac{1}{x}$ e $g(x)=2x+3$.

a) Calcule $(g\circ f)(-1)$ e $(f\circ g)(0)$.

b) Caracterize $f\circ g$.

c) Caracterize $f\circ g$.

Resolução:

a) $(g\circ f)(-1)=g(f(-1))=g(-1)=1$ e $(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(3)=\dfrac{1}{3}$.

b)

$$\begin{aligned} D_{f\circ g} &= \{x\in IR : x\in D_g \wedge g(x)\in D_f\} \\ &= \{x\in IR : x\in IR \wedge (2x+3)\in IR\setminus\{0\}\} \\ &= \{x\in IR : 2x+3\neq 0\} \\ &= IR\setminus\{-\tfrac{3}{2}\} \end{aligned}$$

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(2x+3)=\frac{1}{2x+3}$$

Logo,

$$\begin{aligned} fog :\ & IR\setminus\{-\tfrac{3}{2}\}\to IR \\ & x\to \frac{1}{2x+3} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x\in IR : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\} \\ &= \{x\in IR : x\neq 0 \wedge \tfrac{1}{x}\in IR\} \\ &= IR\setminus\{0\} \end{aligned}$$

$$(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\frac{1}{x})=2.\frac{1}{x}+3=\frac{2}{x}+3$$

Logo,

$$\begin{aligned} gof :\ & IR\setminus\{0\}\to IR \\ & x\to \frac{2}{x}+3 \end{aligned}$$

Exercícios

2. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x)=x^2$ e $g(x)=4x$.
Caracterize $f\circ g$ e $g\circ f$.

3. Sejam *f*, *g* e *h* três funções polinomiais definidas por:

$$f(x)=x^2 \quad , \quad g(x)=x+3 \quad \text{e} \quad h(x)=x-2$$

Represente graficamente as funções $f\circ g$, $f\circ h$, $g\circ f$, $h\circ f$ e $g\circ h$.

4. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x) = x^2 + x$ e $g(x) = \frac{1}{x-2}$.

Caracterize $g \circ f$.

Derivada da função composta

A **derivada da função composta** de *f* com *g* ($f \circ g$) pode ser obtida através das derivadas das funções *f* e *g*, da seguinte forma:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x)$$

ou $D_x y = D_u y . D_x u$ ou $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$, sendo $y = (f \circ g)(x)$ e $y = f(u)$ e $u = g(x)$

Sendo $y = (x^2 + 10)^{20}$, podemos considerar $y = (f \circ g)(x)$ com $f(x) = x^{20}$ e $g(x) = x^2 + 10$.

A derivada de $y = (x^2 + 20)^{20}$ pode ser obtida pela regra da derivação composta, também conhecida como regra de derivação em cadeia, da seguinte maneira:

- $f'(x) = 20x^{19}$
- $g'(x) = 2x$

Logo, $y'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(x^2 + 10) \times (2x) = 20.(x^2 + 10)^{19}.(2x) = 40x.(x^2 + 10)^{19}$.

Ou

Sendo $y = (x^2 + 10)^{20}$, podemos considerar $y = u^{20}$ e $u = x^2 + 10$, donde:

- $\frac{dy}{du} = 20u^{19}$
- $\frac{du}{dx} = 2x$

Logo, $y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (20u^{19}) \times (2x) = 20.(x^2 + 10)^{19} \times 2x = 40x.(x^2 + 10)^{19}$.

Exemplos

1. Sejam *f* e *g* funções reais de variável real tais que $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = 2x + 3$.

a) Calcule $(g \circ f)'(-3)$.

b) Determine $(f \circ g)'(x)$

Resolução:

a) Como $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ e $g'(x) = 2$, temos $(g \circ f)'(-3) = g'(f(-3)) \times f'(-3) = g'(-\frac{1}{3}) \times (-\frac{1}{9}) = 2 \times (-\frac{1}{9}) = -\frac{2}{9}$.

b) $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = f'(2x + 3) \times 2 = -\frac{1}{(2x+3)^2} \times 2 = -\frac{2}{(2x+3)^2}$.

Ou

Como $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 3) = \frac{1}{2x+3}$, podemos considerar $y = (f \circ g)(x) = \frac{1}{u}$, com $u = 2x + 3$.

Logo, $(f \circ g)'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = -\frac{1}{u^2} \times 2 = -\frac{1}{(2x+3)^2} \times 2 = -\frac{2}{(2x+3)^2}$.

2. Mostrar, aplicando a regra de derivação composta, que: $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Resolução:

Para $x > 0$, é $x = (\sqrt{x})^2$, sendo $x' = ((\sqrt{x})^2)' = 1$.

Assim, seja $(\sqrt{x})^2 = (f \circ g)(x)$, com $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt{x}$.

Logo, $1 = ((\sqrt{x})^2)' = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \times g'(x) = 2\sqrt{x} \times (\sqrt{x})'$, donde $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, c.q.m..

Nota:

Seja $x > 0$.

Então, $x = (\sqrt{x})^2$.

Assim, derivando em ordem a *x* ambos os membros, temos:

$1 = 2 \times (\sqrt{x})^1 \times (\sqrt{x})'$

Logo, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. Mostrar, aplicando a regra de derivação composta, que: $((\ln x + 1)^2)' = \dfrac{2}{x} \cdot (\ln x + 1)$.

Seja $y = (\ln x + 1)^2$ e $u = \ln x + 1$. Logo, $y = u^2$.

Assim, $y' = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx} = 2u \times \dfrac{1}{x} = 2.(\ln x + 1) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2}{x} \cdot (\ln x + 1)$.

Exercícios

5. Mostrar, aplicando a regra de derivação composta, que:

a) $(\sqrt[3]{x})' = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) $(\sqrt[3]{u})' = \dfrac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$, com $u = f(x)$

6. Calcule, aplicando a regra de derivação composta:

a) $\left(\sqrt{x^2 - 9}\right)'$

b) $(\ln (\dfrac{1-x}{1+x}))'$

7. A lei de Boyle-Mariotte estabelece que mantendo constante a temperatura, a pressão *P* e o volume *V* de um gás estão inversamente relacionados, sendo $PV = k$, k = constante.

a) Supondo que se mantém constante a temperatura, uma dada quantidade de gás é livre de se expandir. Calcule a taxa de variação da pressão com respeito ao volume.

b) A uma pressão de 3 atmosferas uma certa quantidade de gás ocupa o volume de 12 centímetros cúbicos. Suponha que a temperatura se mantém constante.

b1) Se a pressão aumenta o volume aumenta ou diminui?

b2) Se a pressão aumenta à taxa de variação de 0,04 atm/min, determine a taxa de variação do volume em que a pressão é de 30 atmosferas.

8. O raio de um balão esférico aumenta 2 cm/s.

Qual é a taxa de variação do volume de ar soprado para dentro do balão no momento em que o raio é de 20 centímetros?

SOLUÇÕES

1.

a) Aproximadamente 12,5 l/min.

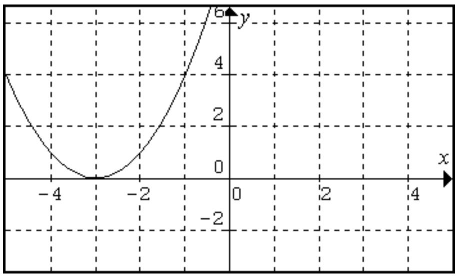
b) Após aproximadamente 45 segundos.

2.

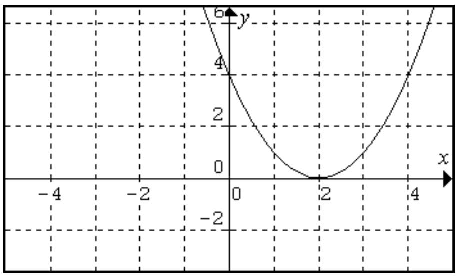
$$fog: \; IR \to IR \qquad \text{e} \qquad gof: \; IR \to IR$$
$$x \to 16x^2 \qquad\qquad x \to 4x^2$$

3.

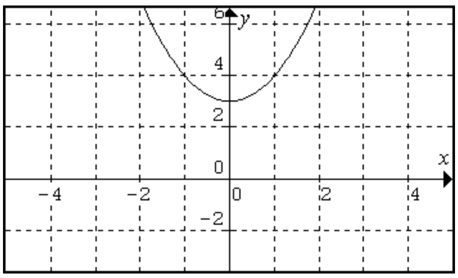
$(f \circ g)(x) = (x+3)^2$



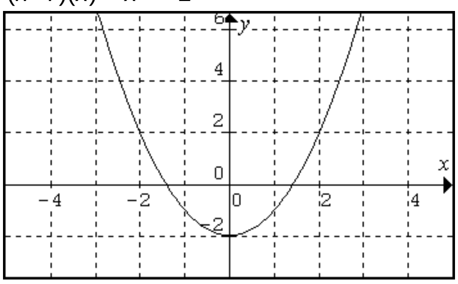
$(f \circ h)(x) = (x-2)^2$



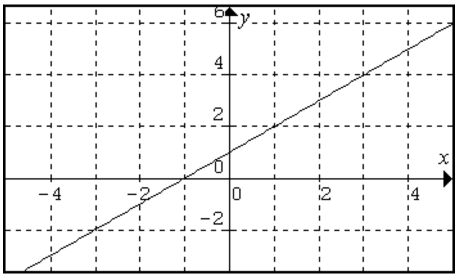
$(g \circ f)(x) = x^2 + 3$



$(h \circ f)(x) = x^2 - 2$



$(g \circ h)(x) = x + 1$



4.

$$gof: \; IR \setminus \{-2, 1\} \to IR$$
$$x \to \frac{1}{x^2 + x - 2}$$

6.

a) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 9}}$

b) $\dfrac{-2}{1 - x^2}$

7.

a) $\dfrac{dP}{dV} = -\dfrac{k}{V^2}$.

b1) $V = \dfrac{36}{P}$. Se a pressão aumenta o volume diminui.

b2) $-0{,}0016 \; cm^3 / \min$.

8. $3200p \; cm^3 / s$.

O Professor

Proposta de Resolução:

4. Ora, $D_{g\circ f}=\{x\in IR : x\in D_f \wedge f(x)\in D_g\}=\{x\in IR : x\in IR \wedge (x^2+x)\in IR\setminus\{2\}\}=IR\setminus\{-2,1\}$, pois

$$x^2+x=2 \Leftrightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} \Leftrightarrow x=1 \vee x=-2 .$$

Como $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(x^2+x)=\frac{1}{x^2+x-2}$, $\forall x\in IR\setminus\{-2,1\}$, então: $\begin{array}{l} gof: \ IR\setminus\{-2,1\}\to IR \\ x\to \dfrac{1}{x^2+x-2} \end{array}$.

5.

a) Seja $y=x=(\sqrt[3]{x})^3$ e $u=\sqrt[3]{x}$. Logo, $y=u^3$ e $y'=x'=1$.

Ora, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=3u^2\times(\sqrt[3]{x})'=3\sqrt[3]{x^2}\times(\sqrt[3]{x})'$.

Logo, como $y'=x'=1$, temos $(\sqrt[3]{x})'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

b) Sendo $u=(\sqrt[3]{u})^3$ e $v=\sqrt[3]{u}$, com $u=f(x)$, então $u=v^3$ e $v'=\frac{dv}{dx}=(\sqrt[3]{u})'$.

Ora, $u'=\frac{du}{dx}=\frac{du}{dv}\cdot\frac{dv}{dx}=3v^2\times(\sqrt[3]{u})'=3\sqrt[3]{u^2}\times(\sqrt[3]{u})'$.

Logo, $(\sqrt[3]{u})'=\frac{u'}{3\sqrt[3]{u^2}}$, com $u=f(x)$.

6.

a) Seja $y=\sqrt{u}$ e $u=x^2-9$. Logo, $\frac{du}{dx}=2x$ e $\frac{dy}{du}=\frac{1}{2\sqrt{u}}$.

Ora, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{2\sqrt{u}}\times 2x=\frac{1}{2\sqrt{x^2-9}}\times 2x=\frac{2x}{2\sqrt{x^2-9}}=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

Logo, $\left(\sqrt{x^2-9}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}$.

b) Sendo $y=\ln(\frac{1-x}{1+x})$ e $u=\frac{1-x}{1+x}$, então $y=\ln u$.

Ora, $y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{1}{u}\times\frac{-1.(1+x)-1.(1-x)}{(1+x)^2}=\frac{1}{\frac{1-x}{1+x}}\times\frac{-2}{(1+x)^2}=\frac{1+x}{1-x}\times\frac{-2}{(1+x)^2}=\frac{-2}{(1-x)(1+x)}=\frac{-2}{1-x^2}$.

Logo, $(\ln(\frac{1-x}{1+x}))'=\frac{-2}{1-x^2}$.

7.

a) Como $PV=k \Leftrightarrow P=\frac{k}{V}$ e k é constante, temos $\frac{dP}{dV}=(\frac{k}{V})'=\frac{0-V'\times k}{V^2}=-\frac{k}{V^2}$.

b1) Nesse caso será $P = \dfrac{36}{V}$. Logo, se a pressão aumenta o volume diminui, pois as grandezas são inversamente proporcionais.

b2) Ora, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dP} \times \dfrac{dP}{dt} = -\dfrac{k}{P^2} \times \dfrac{dP}{dt}$.

Como $k = 36$ e $\dfrac{dP}{dt} = 0{,}04$, então $\dfrac{dV}{dt} = -\dfrac{36}{30^2} \times 0{,}04 = -0{,}0016$ cm^3/min.

8. O volume de ar dentro do balão esférico é dado por $V = \dfrac{4}{3} . p . r^3$ e sabe-se que $\dfrac{dr}{dt} = 2$ cm/s.

Ora, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dr} \times \dfrac{dr}{dt} = 4p . r^2 \times \dfrac{dr}{dt}$. Logo, $\left(\dfrac{dV}{dt}\right)_{r=20} = 4p \times 20^2 \times 2 = 3200p$ cm^3/s.

O Professor