Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo de 2003/04 ***Derivadas - 1*** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ____

1. A temperatura ***T***, em graus centígrados, do forno de uma padaria varia, a partir do momento em que é ligado, de acordo com

$$T(m) = \frac{180m + 26}{1 + m}, \quad \text{com } \boldsymbol{m} \text{ em minutos.}$$

a) A que temperatura está o forno quando é ligado?
Para que valor vai tender a estabilizar a temperatura?
Justifique a sua resposta.

b) Sem resolver a equação $T(m) = 143$, justifique que é verdadeira a seguinte afirmação:

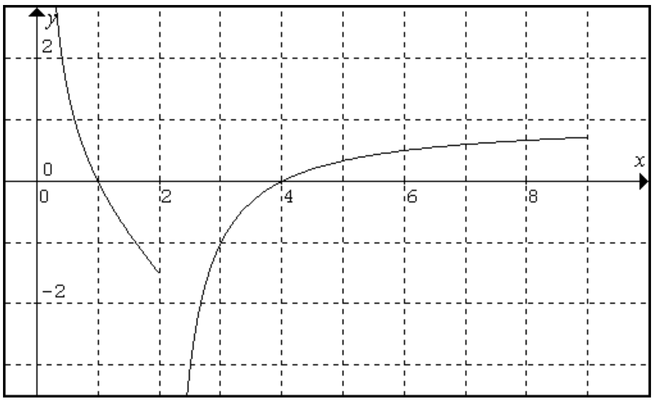
«Num instante compreendido entre o 3.º e 4.º minuto, o forno atingirá a temperatura de 143º C.»

c) Determine a taxa média de variação da temperatura do forno no intervalo $[0,1]$ minutos.

d) Diga qual o significado de $\lim\limits_{m \to 0^+} \dfrac{T(m) - 26}{m}$ e determine o seu valor.

2. Seja ***h*** a função real de variável real, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - x & \Leftarrow \quad x \le 2 \\ 2 - \dfrac{x}{x-2} & \Leftarrow \quad x > 2 \end{cases}$$



a) Na figura ao lado está representada a função ***f***, restrição de ***h*** ao intervalo $]0,9]$.

a1) Por observação do gráfico, indique, justificando, o sinal das derivadas laterais de ***h*** no ponto de abcissa $x = 2$, se existirem.

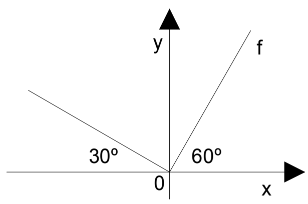
a2) Usando a definição, determine a derivada lateral esquerda de ***h*** no ponto de abcissa $x = 2$.

a3) Escreva uma equação vectorial da semi-recta lateral esquerda tangente ao gráfico de ***h*** no ponto de abcissa $x = 2$.

b) Determine as assimptotas do gráfico de ***h***.

c) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[2 - \dfrac{1}{x^2 - 4} - h(x) \right]$.

3. Considere a função de domínio *IR* representada graficamente:



a) Defina *f* analiticamente.

b) Represente, graficamente, a função *f´*, derivada da função *f*.

4. Cada um dos seguintes limites representa a derivada de uma função *f* real de variável real num ponto *c*. Caracterize uma possível função *f* e diga qual é *c*:

a) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$.

b) $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-(3+h)^3+27}{h}$

5. Considere as fórmulas da área do círculo de raio *r*, $A = \pi.r^2$, e do volume da esfera de raio *r*, $V = \dfrac{4}{3}.\pi.r^3$.

a) Determine $\dfrac{dA}{dr}$. Qual é o seu significado geométrico.

b) Determine $\dfrac{dV}{dr}$. Qual é o seu significado geométrico.

6. Seja *h* a função real de variável real, de domínio $IR \setminus \{-2\}$, definida por. $h(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$.

a) Verifique que o gráfico da função admite uma recta tangente paralela à recta de equação $y = 5x$ e apresente a sua equação reduzida.

b) Faça uma opção correcta!
Uma equação da recta tangente ao gráfico da função no seu zero é:

[A] $8y - 10x - 5 = 0$ **[B]** $8y + 10x - 4 = 0$ **[C]** $8x - 10y - 4 = 0$ **[D]** $x = \dfrac{1}{2}$

7. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x) = 1 - e^x \; ; \qquad g(x) = -3^x \qquad \text{e} \qquad h(x) = \ln x$$

a) Determine uma equação da recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa nula e que contém esse ponto.

b) Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta tangente ao gráfico de *g*, no ponto de abcissa nula, com o eixo das abcissas.

c) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico da função *h*, no ponto de abcissa 1.

8. Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{1-e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$ **c)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^8}$ **d)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{5^{x+1} - 5}{2x}$

e) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(x+1)^2}{2x}$ **f)** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_{10}(x+1)^2}{2x}$ **g)** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x^3}{3x-3}$ **h)** $\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{\ln(-2x)}{x}$

9. Um objecto metálico é colocado numa panela com água à temperatura de 100º C.
Suponha que a temperatura da água se mantém constante.

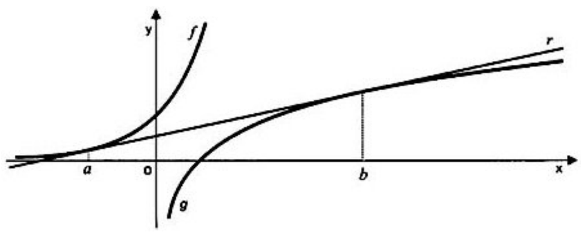
Para $t = 30$ s, a temperatura *T* do objecto é 50º C e esta aumenta instantaneamente (nesse momento) na razão de 2º C por segundo.

Determine *a* e *b* (reais), sabendo que a temperatura *T* do objecto em função do tempo *t*, em segundos, é dada por $T(t) = 100 - a \times e^{-b \times t}$.

10. Para comparar a acidez de diferentes soluções, os químicos usam o pH.
O pH é definido em termos de concentração, x, de iões de hidrogénio numa solução como: $pH = -\log_{10} x$.

Calcule a taxa de variação de pH com respeito à concentração de iões de hidrogénio quando pH é 3.

11. Na figura ao lado estão representadas graficamente duas funções:



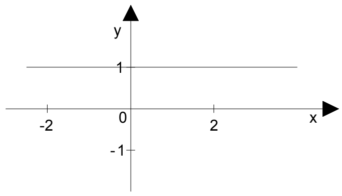
- a função f, definida em IR por $f(x) = 2^x$
- a função g, definida em IR^+ por $g(x) = \log_2 x$

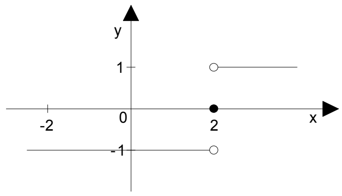
a) Mostre que a taxa média de variação de g no intervalo $[b, b+3]$ é dada por $\log_8(1+\frac{3}{b})$, com $b \in IR^+$.

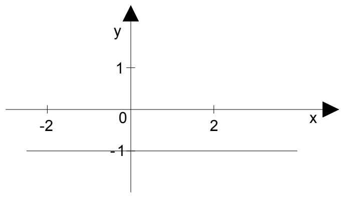
b) A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.

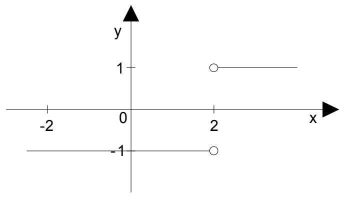
Nesta circunstância, mostre que é condição necessária que $2^a = \frac{1}{b} \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$, com $b \in IR^+$.

12. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = |x-2|$.
Indique qual das representações gráficas esboçadas na figura é a função derivada de f.

[A]


[B]


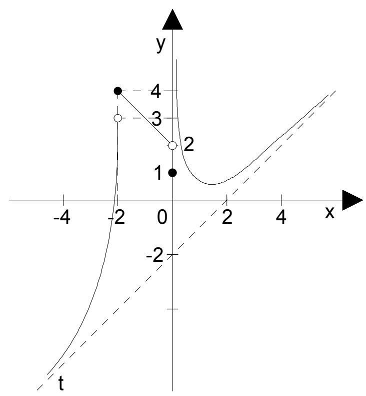
[C]


[D]


13. Dada a função real de variável real definida por $m(x) = \frac{2x}{x+1}$, o valor de $\lim_{h \to 0} \frac{m(h+2) - m(2)}{h}$ é:

[A] 0 **[B]** não existe **[C]** $\frac{2}{9}$ **[D]** $\frac{2}{3}$

14. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio IR , da qual a recta t é uma assimptota.



O valor de $\lim_{x \to -2^+} \frac{g(x) - 4}{x+2}$ é:

[A] -2 **[B]** -1
[C] 0 **[D]** $+\infty$

15. A função quadrática $x \to f(x) = ax^2 + c$, cuja curva representativa corta o eixo das ordenadas no ponto A de ordenada 2 e tem por tangente no ponto de abcissa 1 a recta de equação $y = -6x + 5$, é:

[A] $f(x) = -5x^2 + 2$ **[B]** $f(x) = -3x^2 + 2$ **[C]** $f(x) = -3x^2 + 5$ **[D]** $f(x) = -6x^2 + 2$

16. Seja s a função, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por $s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \Leftarrow \quad x < \pi \\ x - \pi & \Leftarrow \quad x \geq \pi \end{cases}$.

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

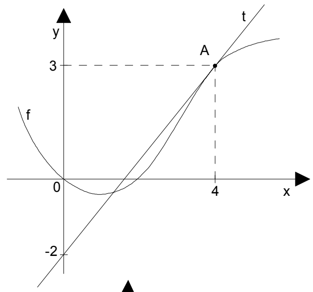
[A] s é contínua

[B] s tem derivada em 2π

[C] $y = \pi$ é uma assimptota do gráfico de s

[D] Não existem assimptotas ao gráfico de s

17. A recta t é tangente à curva representativa da função f no ponto A (4, 3).
Pode-se afirmar que:



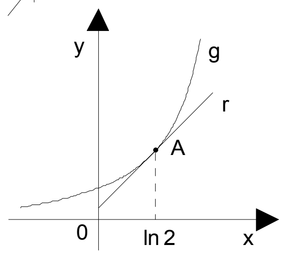
[A] $f'(4) = -2$

[B] $f'(4) = 3$

[C] $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - 3}{x - 4} = \dfrac{5}{4}$

[D] $f'(4^+) \neq f'(4^-)$

18. A recta r é tangente ao gráfico de g: $x \to e^x$ no ponto A de abcissa $\ln 2$.
Uma equação de r é:



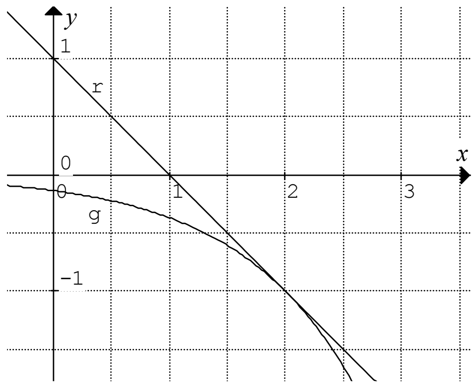
[A] $y = 2x + 2 - \ln 4$

[B] $y = 2x + 2\ln\sqrt{2}$

[C] $y = -\dfrac{1}{2}x + \ln(e^2\sqrt{2})$

[D] $y = 2x + \dfrac{1}{2}\ln 2 + e^2$

19. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g derivável de domínio IR.



A recta r, de equação $y = -x + 1$, é tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(2, -1)$.

a) Sabendo ainda que o eixo Ox é assimptota do gráfico de g na vizinhança de $-\infty$, então g pode ser definida por:

[A] $g(x) = \ln\left(\dfrac{3 - x}{e}\right)$

[B] $g(x) = -2^{x-2}$

[C] $g(x) = -e^{x-2}$

[D] $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

b) Seja $f(x) = \ln(k - x) - 1$, com $k \in R$, uma função real de variável real.

O valor de k para o qual é contínua no ponto $x = 2$ a função $h(x) = \begin{cases} f(x) & \Leftarrow \quad x < 2 \\ g(x) & \Leftarrow \quad x \geq 2 \end{cases}$ é

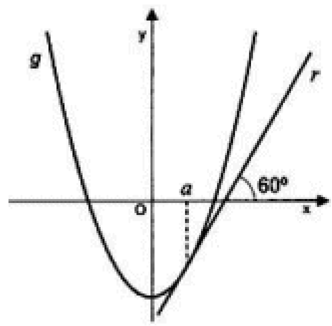
[A] e^3

[B] 2

[C] $e^2 + 2$

[D] 3

20. Na figura estão representadas:



- parte do gráfico da função g, de domínio IR, definida por $g(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$
- uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa **a**.

A inclinação da recta r é 60º.
Indique o valor de **a**.

[A] $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

[B] $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[C] $\dfrac{1}{3}$

[D] $\dfrac{1}{2}$

21. Seja $L = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Então:

[A] $L = 1$ **[B]** $L = 0$ **[C]** $L = -1$ **[D]** $L = -\infty$

22. Seja *f* uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$.

[A] $\dfrac{2}{3}$ **[B]** $\dfrac{3}{2}$ **[C]** 4 **[D]** 0

23. Seja $g : IR^+ \to IR$ a função definida por $g(x) = \ln x$.
No gráfico da função *g* existe um ponto onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.
Qual é a abcissa desse ponto?

[A] 0 **[B]** 1 **[C]** e **[D]** $\ln 2$

24. Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima.

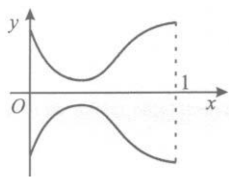
Admita que a sua altitude *h* (em metros), *t* segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão $h(t) = 100t - 5t^2$.
Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projéctil, dois segundos após o lançamento?

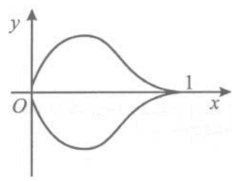
[A] 80 **[B]** 130 **[C]** 170 **[D]** 230

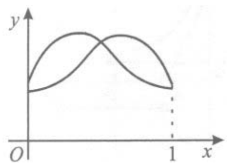
25. Sendo *f* a função definida por $f(x) = x^e$, a expressão analítica de *f'* é

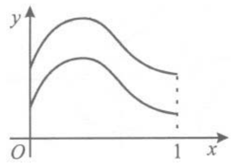
[A] x^e **[B]** x^{e-1} **[C]** $e.x^{e-1}$ **[D]** $x^e \ln x$

26. De duas funções *f* e *g*, de domínio [0, 1], sabe-se que $f'(x) = g'(x), \forall x \in [0, 1]$.
Em qual das figuras seguintes podem estar representados os gráficos de *f* e de *g*?

[A]


[B]


[C]


[D]


SOLUÇÕES

1.

a) Quando é ligado, o forno encontra-se à temperatura de 26º C.
A temperatura de 180º C é a temperatura para que o forno vai tender a estabilizar.

b) (Aplique o teorema de Bolzano-Cauchy)

c) $t.m.v._{[0,\,1]} = 77$ (ºC/min).

d) $\lim\limits_{m \to 0^+} \dfrac{T(m) - 26}{m} = 154$ (ºC/min).

2.

a1) A derivada lateral esquerda no ponto considerado é negativa;
A derivada lateral direita não existe, pois $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = -\infty$.

a2) $h'(2^-) = -\frac{5}{4}$.

a3) $(x, y) = (2, -\frac{3}{2}) + k.(-4, 5),\ k \in R_0^+$ define vectorialmente a semi-recta pedida.

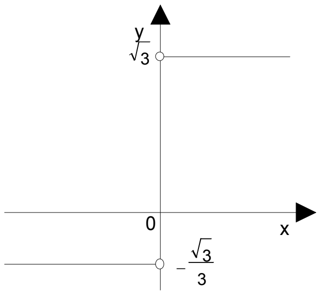
b) $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral. (A lateral direita já observável no gráfico de *f*).
$x = 2$ é equação de uma assimptota vertical unilateral direita. (Já observável no gráfico de *f*)
$y = 1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$. (Já observável no gráfico de *f*)
$y = -x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[2 - \frac{1}{x^2 - 4} - h(x) \right] = +\infty$.

3.

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}x & \Leftarrow \quad x < 0 \\ \sqrt{3}x & \Leftarrow \quad x \geq 0 \end{cases}$.

b)



4.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ e $c = 9$ (p.e.)

b) $f(x) = -x^3$ e $c = 3$ (p.e.)

6.

a) Há duas soluções: $y = 5x + 2$ ou $y = 5x + 22$.

b) C.

7.

a) $y = x$.

b) $(\frac{-1}{\ln 3}, 0)$.

c) $y = x - 1$.

8.

a) $-\infty$.

b) $\frac{1}{2}$.

c) $+\infty$.

d) $\frac{5 \times \ln 5}{2}$.

e) 1.

f) $\frac{1}{\ln 10}$.

g) 1.

h) $+\infty$.

9. $a = 50 \times e^{\frac{6}{5}}$; $b = \frac{1}{25}$.

10. $-\frac{1000}{\ln 10}$.

12. D.

13. C.

14. B.

15. B.

16. B.

17. C.

18. A.

19.

a) C.

b) D.

20. D.

21. C.

22. A.

23. B.

24. A.

25. C.

26. D.

O Professor