Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo de 2003/04 ***Derivadas - 1*** **12.º Ano**

Nome: ____ N.º: ___ Turma:____

1. A temperatura ***T***, em graus centígrados, do forno de uma padaria varia, a partir do momento em que é ligado, de acordo com

$$T(m) = \frac{180m + 26}{1+m}, \quad \text{com } \boldsymbol{m} \text{ em minutos.}$$

a) A que temperatura está o forno quando é ligado?
Para que valor vai tender a estabilizar a temperatura?
Justifique a sua resposta.

b) Sem resolver a equação $T(m) = 143$, justifique que é verdadeira a seguinte afirmação:

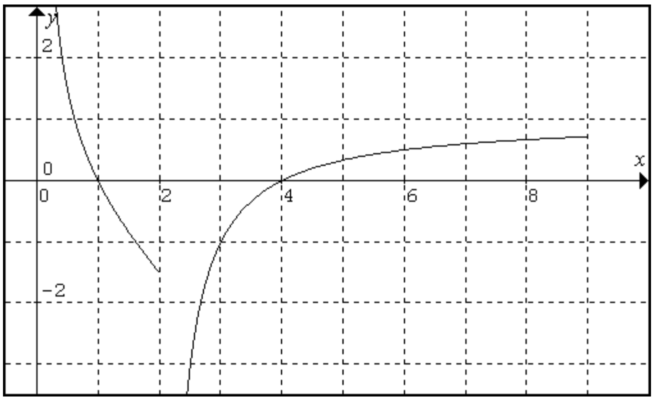
«Num instante compreendido entre o 3.º e 4.º minuto, o forno atingirá a temperatura de 143º C.»

c) Determine a taxa média de variação da temperatura do forno no intervalo $[0, 1]$ minutos.

d) Diga qual o significado de $\lim\limits_{m \to 0^+} \dfrac{T(m) - 26}{m}$ e determine o seu valor.

2. Seja ***h*** a função real de variável real, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - x & \Leftarrow \quad x \le 2 \\ 2 - \dfrac{x}{x-2} & \Leftarrow \quad x > 2 \end{cases}$$



a) Na figura ao lado está representada a função ***f***, restrição de ***h*** ao intervalo $]0, 9]$.

a1) Por observação do gráfico, indique, justificando, o sinal das derivadas laterais de ***h*** no ponto de abcissa $x = 2$, se existirem.

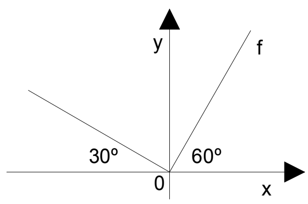
a2) Usando a definição, determine a derivada lateral esquerda de ***h*** no ponto de abcissa $x = 2$.

a3) Escreva uma equação vectorial da semi-recta lateral esquerda tangente ao gráfico de ***h*** no ponto de abcissa $x = 2$.

b) Determine as assimptotas do gráfico de ***h***.

c) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[2 - \dfrac{1}{x^2 - 4} - h(x) \right]$.

3. Considere a função de domínio *IR* representada graficamente:



a) Defina *f* analiticamente.

b) Represente, graficamente, a função *f´*, derivada da função *f*.

4. Cada um dos seguintes limites representa a derivada de uma função *f* real de variável real num ponto *c*. Caracterize uma possível função *f* e diga qual é *c*:

a) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt{9+h}-3}{h}$.

b) $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(3+h)^3+27}{h}$

5. Considere as fórmulas da área do círculo de raio *r*, $A=\pi.r^2$, e do volume da esfera de raio *r*, $V=\dfrac{4}{3}.\pi.r^3$.

a) Determine $\dfrac{dA}{dr}$. Qual é o seu significado geométrico.

b) Determine $\dfrac{dV}{dr}$. Qual é o seu significado geométrico.

6. Seja *h* a função real de variável real, de domínio $IR\setminus\{-2\}$, definida por. $h(x)=\dfrac{2x-1}{x+2}$.

a) Verifique que o gráfico da função admite uma recta tangente paralela à recta de equação $y=5x$ e apresente a sua equação reduzida.

b) Faça uma opção correcta!
Uma equação da recta tangente ao gráfico da função no seu zero é:

[A] $8y-10x-5=0$ **[B]** $8y+10x-4=0$ **[C]** $8x-10y-4=0$ **[D]** $x=\dfrac{1}{2}$

7. Considere as funções reais de variável real definidas por:

$$f(x)=1-e^x\,; \qquad g(x)=-3^x \qquad \text{e} \qquad h(x)=\ln x$$

a) Determine uma equação da recta perpendicular à recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa nula e que contém esse ponto.

b) Determine as coordenadas do ponto de intersecção da recta tangente ao gráfico de *g*, no ponto de abcissa nula, com o eixo das abcissas.

c) Escreva uma equação da recta tangente ao gráfico da função *h*, no ponto de abcissa 1.

8. Calcule cada um dos seguintes limites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^x}{1-e^x}$ **b)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{e^{2x}-1}$ **c)** $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^{3x}}{x^8}$ **d)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{5^{x+1}-5}{2x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln (x+1)^2}{2x}$ **f)** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_{10}(x+1)^2}{2x}$ **g)** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x^3}{3x-3}$ **h)** $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln(-2x)}{x}$

9. Um objecto metálico é colocado numa panela com água à temperatura de 100º C.
Suponha que a temperatura da água se mantém constante.

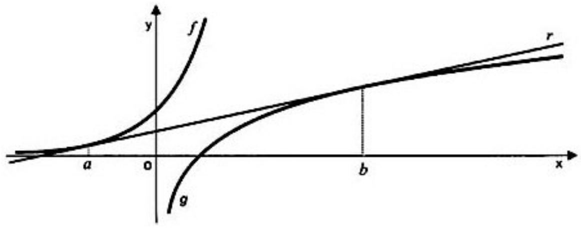
Para $t=30$ s, a temperatura *T* do objecto é 50º C e esta aumenta instantaneamente (nesse momento) na razão de 2º C por segundo.

Determine *a* e *b* (reais), sabendo que a temperatura *T* do objecto em função do tempo *t*, em segundos, é dada por $T(t)=100-a\times e^{-b\times t}$.

10. Para comparar a acidez de diferentes soluções, os químicos usam o pH.
O pH é definido em termos de concentração, x, de iões de hidrogénio numa solução como: $pH = -\log_{10} x$.

Calcule a taxa de variação de pH com respeito à concentração de iões de hidrogénio quando pH é 3.

11. Na figura ao lado estão representadas graficamente duas funções:



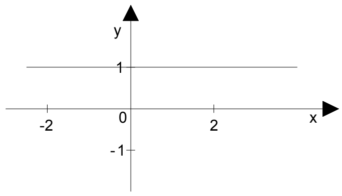
- a função f, definida em IR por $f(x) = 2^x$
- a função g, definida em IR^+ por $g(x) = \log_2 x$

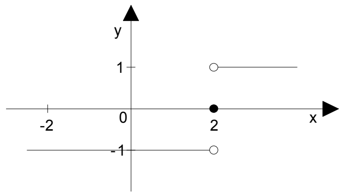
a) Mostre que a taxa média de variação de g no intervalo $[b, b+3]$ é dada por $\log_8 (1 + \frac{3}{b})$, com $b \in IR^+$.

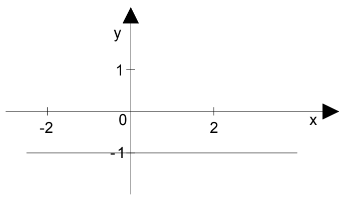
b) A recta r é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa a e é tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa b.

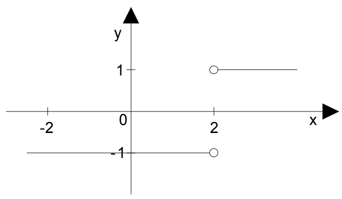
Nesta circunstância, mostre que é condição necessária que $2^a = \frac{1}{b} \times \left(\frac{1}{\ln 2}\right)^2$, com $b \in IR^+$.

12. Seja f a função real de variável real definida por $f(x) = |x - 2|$.
Indique qual das representações gráficas esboçadas na figura é a função derivada de f.

[A]


[B]


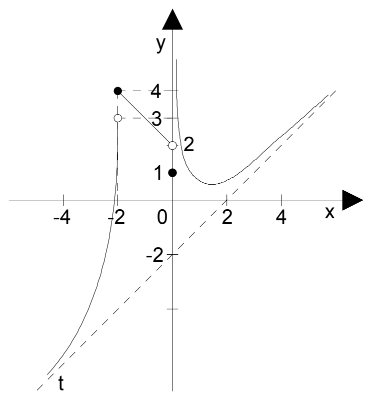
[C]


[D]


13. Dada a função real de variável real definida por $m(x) = \frac{2x}{x+1}$, o valor de $\lim\limits_{h \to 0} \frac{m(h+2) - m(2)}{h}$ é:

[A] 0 **[B]** não existe **[C]** $\frac{2}{9}$ **[D]** $\frac{2}{3}$

14. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função g, de domínio IR , da qual a recta t é uma assimptota.



O valor de $\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{g(x) - 4}{x + 2}$ é:

[A] -2 **[B]** -1
[C] 0 **[D]** $+\infty$

15. A função quadrática $x \to f(x) = ax^2 + c$, cuja curva representativa corta o eixo das ordenadas no ponto A de ordenada 2 e tem por tangente no ponto de abcissa 1 a recta de equação $y = -6x + 5$, é:

[A] $f(x) = -5x^2 + 2$ **[B]** $f(x) = -3x^2 + 2$ **[C]** $f(x) = -3x^2 + 5$ **[D]** $f(x) = -6x^2 + 2$

16. Seja s a função, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por $s(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \Leftarrow \quad x < \pi \\ x - \pi & \Leftarrow \quad x \geq \pi \end{cases}$.

Indique qual das seguintes afirmações é verdadeira.

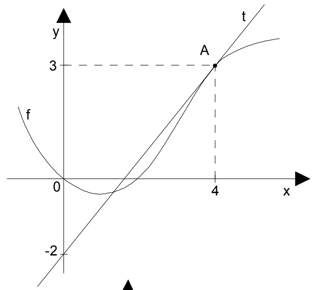
[A] s é contínua

[B] s tem derivada em 2π

[C] $y = \pi$ é uma assimptota do gráfico de s

[D] Não existem assimptotas ao gráfico de s

17. A recta t é tangente à curva representativa da função f no ponto A (4, 3).
Pode-se afirmar que:



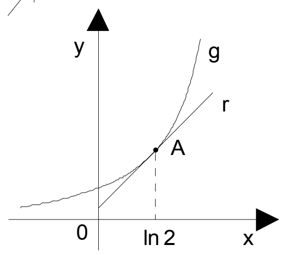
[A] $f'(4) = -2$

[B] $f'(4) = 3$

[C] $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{f(x) - 3}{x - 4} = \dfrac{5}{4}$

[D] $f'(4^+) \neq f'(4^-)$

18. A recta r é tangente ao gráfico de g: $x \to e^x$ no ponto A de abcissa $\ln 2$.
Uma equação de r é:



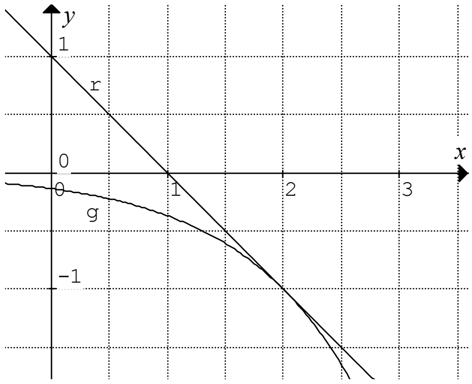
[A] $y = 2x + 2 - \ln 4$

[B] $y = 2x + 2\ln\sqrt{2}$

[C] $y = -\dfrac{1}{2}x + \ln(e^2\sqrt{2})$

[D] $y = 2x + \dfrac{1}{2}\ln 2 + e^2$

19. Na figura está parte da representação gráfica de uma função g derivável de domínio IR.



A recta r, de equação $y = -x + 1$, é tangente ao gráfico de g no ponto de coordenadas $(2, -1)$.

a) Sabendo ainda que o eixo Ox é assimptota do gráfico de g na vizinhança de $-\infty$, então g pode ser definida por:

[A] $g(x) = \ln\left(\dfrac{3 - x}{e}\right)$

[B] $g(x) = -2^{x-2}$

[C] $g(x) = -e^{x-2}$

[D] $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$

b) Seja $f(x) = \ln(k - x) - 1$, com $k \in R$, uma função real de variável real.

O valor de k para o qual é contínua no ponto $x = 2$ a função $h(x) = \begin{cases} f(x) & \Leftarrow \quad x < 2 \\ g(x) & \Leftarrow \quad x \geq 2 \end{cases}$ é

[A] e^3

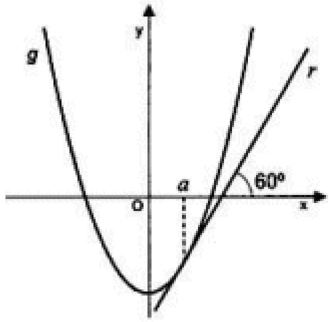
[B] 2

[C] $e^2 + 2$

[D] 3

20. Na figura estão representadas:

- parte do gráfico da função g, de domínio IR, definida por $g(x) = \sqrt{3}x^2 - 1$
- uma recta r tangente ao gráfico de g, no ponto de abcissa **a**.



A inclinação da recta r é 60º.
Indique o valor de **a**.

[A] $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

[B] $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

[C] $\dfrac{1}{3}$

[D] $\dfrac{1}{2}$

21. Seja $L = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{x}{|x|}$.

Então:

[A] $L = 1$ **[B]** $L = 0$ **[C]** $L = -1$ **[D]** $L = -\infty$

22. Seja *f* uma função tal que a sua derivada, no ponto 3, é igual a 4.

Indique o valor de $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{f(x) - f(3)}{x^2 - 9}$.

[A] $\dfrac{2}{3}$ **[B]** $\dfrac{3}{2}$ **[C]** 4 **[D]** 0

23. Seja $g : IR^+ \to IR$ a função definida por $g(x) = \ln x$.
No gráfico da função *g* existe um ponto onde a recta tangente é paralela à bissectriz dos quadrantes ímpares.
Qual é a abcissa desse ponto?

[A] 0 **[B]** 1 **[C]** e **[D]** ln 2

24. Um projéctil é lançado verticalmente de baixo para cima.

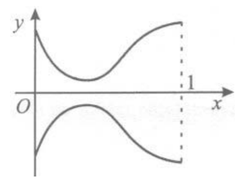
Admita que a sua altitude *h* (em metros), *t* segundos após ter sido lançado, é dada pela expressão $h(t) = 100t - 5t^2$.
Qual é a velocidade (em metros por segundo) do projéctil, dois segundos após o lançamento?

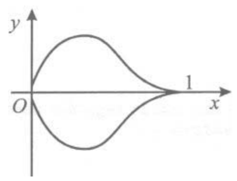
[A] 80 **[B]** 130 **[C]** 170 **[D]** 230

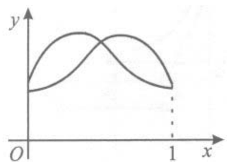
25. Sendo *f* a função definida por $f(x) = x^e$, a expressão analítica de *f'* é

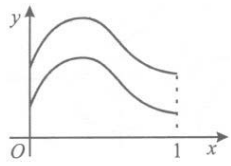
[A] x^e **[B]** x^{e-1} **[C]** $e.x^{e-1}$ **[D]** $x^e \ln x$

26. De duas funções *f* e *g*, de domínio [0, 1], sabe-se que $f'(x) = g'(x), \forall x \in [0, 1]$.
Em qual das figuras seguintes podem estar representados os gráficos de *f* e de *g*?

[A] 

[B] 

[C] 

[D] 

SOLUÇÕES

1.

a) Quando é ligado, o forno encontra-se à temperatura de 26º C.
A temperatura de 180º C é a temperatura para que o forno vai tender a estabilizar.

b) (Aplique o teorema de Bolzano-Cauchy)

c) $t.m.v._{[0,\,1]} = 77$ (ºC/min).

d) $\lim\limits_{m \to 0^+} \dfrac{T(m) - 26}{m} = 154$ (ºC/min).

2.

a1) A derivada lateral esquerda no ponto considerado é negativa;
A derivada lateral direita não existe, pois $\lim\limits_{x \to 2^+} \dfrac{g(x) - g(2)}{x - 2} = -\infty$.

a2) $h'(2^-) = -\frac{5}{4}$.

a3) $(x, y) = (2, -\frac{3}{2}) + k.(-4, 5),\ k \in R_0^+$ define vectorialmente a semi-recta pedida.

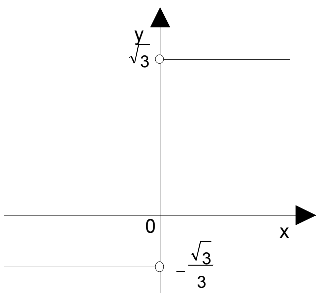
b) $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral. (A lateral direita já observável no gráfico de *f*).
$x = 2$ é equação de uma assimptota vertical unilateral direita. (Já observável no gráfico de *f*)
$y = 1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$. (Já observável no gráfico de *f*)
$y = -x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[2 - \frac{1}{x^2 - 4} - h(x) \right] = +\infty$.

3.

a) $f(x) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{3}}{3}x & \Leftarrow & x < 0 \\ \sqrt{3}x & \Leftarrow & x \geq 0 \end{cases}$.

b)



4.

a) $f(x) = \sqrt{x}$ e $c = 9$ (p.e.)

b) $f(x) = -x^3$ e $c = 3$ (p.e.)

6.

a) Há duas soluções: $y = 5x + 2$ ou $y = 5x + 22$.

b) C.

7.

a) $y = x$.

b) $(\frac{-1}{\ln 3}, 0)$.

c) $y = x - 1$.

8.

a) $-\infty$.

b) $\frac{1}{2}$.

c) $+\infty$.

d) $\frac{5 \times \ln 5}{2}$.

e) 1.

f) $\frac{1}{\ln 10}$.

g) 1.

h) $+\infty$.

9. $a = 50 \times e^{\frac{6}{5}}$; $b = \frac{1}{25}$.

10. $-\frac{1000}{\ln 10}$.

12. D.

13. C.

14. B.

15. B.

16. B.

17. C.

18. A.

19.

a) C.

b) D.

20. D.

21. C.

22. A.

23. B.

24. A.

25. C.

26. D.

O Professor

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04 | ***Derivadas - 1*** | **12.º Ano**

Proposta de Resolução:

1.

a) $T(0)=\dfrac{0+26}{1+0}=26$. Quando é ligado, o forno encontra-se à temperatura de 26º C.

$\lim\limits_{m\to+\infty} T(m)=\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{180m+26}{1+m}=\lim\limits_{m\to+\infty}\dfrac{180+\frac{26}{m}}{\frac{1}{m}+1}=\dfrac{180}{1}=180$. A temperatura de 180º C é a temperatura para que o forno vai tender a estabilizar.

O valor encontrado permite concluir que a temperatura do forno poderá ser tão próxima de 180º C quanto se desejar, desde que o tempo durante o qual esteja ligado seja suficientemente grande.

b) A função *T* é contínua no intervalo [3, 4], pois é o quociente de duas funções contínuas (são polinomiais), não se anulando a função divisor nesse intervalo. Como $T(3)=141{,}5$ e $T(4)=149{,}2$, então $T(3)<143<T(4)$.

Logo, de acordo com o teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists m\in\left]3,4\right[: T(m)=143$.

Assim, «*num instante compreendido entre o 3.º e 4.º minuto, o forno atingirá a temperatura de 143º C*».

c) $t.m.v._{[0,\,1]}=\dfrac{T(1)-T(0)}{1-0}=\dfrac{\frac{206}{2}-26}{1}=77$.

A taxa média de variação da temperatura do forno no intervalo $[0,1]$ minutos é 77º C/min.

d) O limite apresentado traduz a taxa (instantânea) de variação da temperatura do forno no instante em que é ligado.

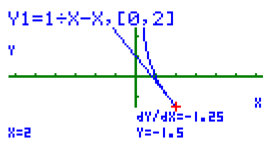
$$\lim_{m\to0^+}\frac{T(m)-26}{m}=\lim_{m\to0^+}\frac{\frac{180m+26}{1+m}-26}{m}=\lim_{m\to0^+}\frac{\frac{180m+26-26-26m}{1+m}}{m}=\lim_{m\to0^+}\frac{154m}{m.(1+m)}=154\ \text{(ºC/min).}$$

2.

a1) A derivada lateral esquerda no ponto considerado é negativa;

A derivada lateral direita não existe, pois $\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{g(x)-g(2)}{x-2}=-\infty$.

À esquerda, a semi-recta tangente ao gráfico da função no ponto considerado é uma semi-recta com declive negativo (inclinação superior a 90º).



À direita, a semi-recta tangente ao gráfico da função no ponto considerado é uma semi-recta vertical, cuja posição de tangência provém de situações de secante com declives negativos.

a2) $$h'(2^-)=\lim_{x\to2^-}\frac{(\frac{1}{x}-x)-(\frac{1}{2}-2)}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{\frac{2-2x^2+3x}{2x}}{x-2}=\lim_{x\to2^-}\frac{2-2x^2+3x}{2x.(x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{(x-2)(-2x-1)}{2x.(x-2)}=\lim_{x\to2^-}\frac{-2x-1}{2x}=-\frac{5}{4}.$$

a3) A semi-recta tem origem no ponto de coordenadas $(2,h(2))$ e o seu declive é $m=h'(2^-)=-\dfrac{5}{4}$, logo um vector director é $\vec{u}=(-4,5)$. Assim, $(x,y)=(2,-\dfrac{3}{2})+k.(-4,5),\ k\in R_0^+$ define vectorialmente a semi-recta pedida.

b) *<u>Determinação das assimptotas verticais</u>*:

A função apenas não é contínua no ponto $x=2$, logo apenas poderá haver assimptotas verticais em $x=0$ e em $x=2$.

$$\lim_{x\to0^\mp}h(x)=\lim_{x\to0^\mp}(\frac{1}{x}-x)=\underbrace{\lim_{x\to0^\mp}\frac{1}{x}}_{\mp\infty}-\underbrace{\lim_{x\to0^\mp}x}_{0}=\mp\infty$$

Logo, $x=0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral. (A lateral direita já observável no gráfico de *f*)

$$\lim_{x\to2^+}h(x)=\lim_{x\to2^+}(2-\frac{x}{x-2})=2-\underbrace{\lim_{x\to2^+}\frac{x}{x-2}}_{+\infty}=-\infty$$ e como já se sabe $\lim\limits_{x\to2^-}h(x)=\lim\limits_{x\to2^-}(\dfrac{1}{x}-2)=-\dfrac{3}{2}$.

Logo, $x=2$ é equação de uma assimptota vertical unilateral direita. (Já observável no gráfico de *f*)

<u>*Determinação das assimptotas não verticais*</u>:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2}\right) = 0 - 0 = 0\ ;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (h(x) - 0\times x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{x}{x-2}\right) = 2 - \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{2}{x}} = 2 - 1 = 1\ .$$

Logo, $y = 1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$. (Já observável no gráfico de *f*)

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = 0 - 1 = -1\ ;$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (h(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} - x + x\right) = 0\ .$$

Logo, $y = -x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

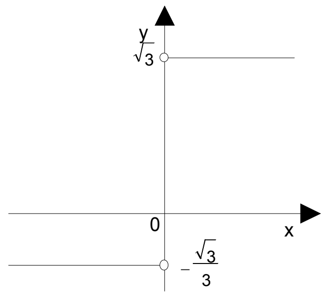
c) $\displaystyle \lim_{x\to2^+}\left[2 - \frac{1}{x^2-4} - h(x)\right] = \lim_{x\to2^+} \left(2 - \frac{1}{x^2-4} - 2 + \frac{x}{x-2}\right)^{(-\infty+\infty)} = \lim_{x\to2^+} \left(\frac{x^2+2x-1}{x^2-4}\right) = 7 \times \underbrace{\lim_{x\to2^+} \left(\frac{1}{x^2-4}\right)}_{+\infty} = +\infty\ .$

3.

a) Considerando que o declive de uma recta é a tangente da sua inclinação,

temos: $f(x) = \begin{cases} tg\ 150^\circ\, x + 0 & \Leftarrow\ x < 0 \\ tg\ 60^\circ\, x + 0 & \Leftarrow\ x \ge 0 \end{cases} = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{3}x & \Leftarrow\ x < 0 \\ \sqrt{3}x & \Leftarrow\ x \ge 0 \end{cases}$.

b) Como $f'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sqrt{3}}{3} & \Leftarrow\ x < 0 \\ \sqrt{3} & \Leftarrow\ x > 0 \end{cases}$, uma representação gráfica de *f'* é:



4.

a) Como $\displaystyle \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{9+h}-3}{h} = \lim_{h\to0} \frac{\sqrt{9+h}-\sqrt{9}}{h} = f'(c)$, poderá ser $\begin{array}{l} f:\ IR_0^+ \to IR \\ \quad x \to \sqrt{x} \end{array}$ e $c = 9$ ou $\begin{array}{l} f:\ [-6, +\infty[\to IR \\ \quad x \to \sqrt{6+x} \end{array}$ e $c = 3$, por exemplo.

b) Como $\displaystyle \lim_{h\to0} \frac{-(3+h)^3 + 27}{h} = \lim_{h\to0} \frac{-(3+h)^3 - (-3^3)}{h}$, poderá ser $\begin{array}{l} f:\ IR \to IR \\ \quad x \to -x^3 \end{array}$ e $c = 3$ ou $\begin{array}{l} f:\ IR \to IR \\ \quad x \to -(x+3)^3 \end{array}$ e $c = 0$, por exemplo.

5.

a) Ora, $\dfrac{dA}{dr} = 2\pi.r$. Traduz o perímetro de um círculo de raio *r*.

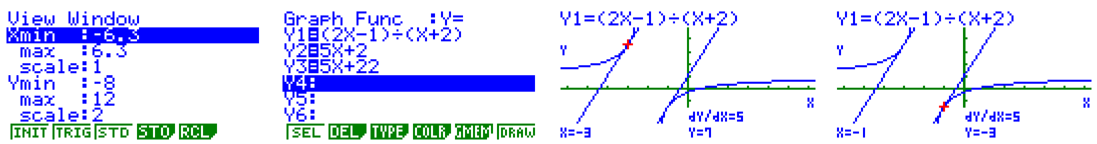
b) Ora, $\dfrac{dV}{dr} = 3 \times \dfrac{4}{3} \times \pi.r^2 = 4\pi.r^2$. Traduz a área de uma esfera de raio *r*.

6.

a) Ora, $h'(x) = \dfrac{(2x-1)'\times(x+2) - (x+2)'\times(2x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{2.(x+2)-(2x-1)}{(x+2)^2} = \dfrac{5}{(x+2)^2}$, $\forall x \in IR \setminus \{-2\}$.

Tendo em consideração a interpretação geométrica da derivada de uma função num ponto, há que mostrar existir $a \in IR \setminus \{-2\}$, tal que $h'(a) = 5$. O que se verifica, pois $h'(a) = 5 \Leftrightarrow \dfrac{5}{(a+2)^2} = 5 \Leftrightarrow a = -1 \vee a = -3$.

Essa recta é tangente no ponto de coordenadas $(-1, h(-1)) = (-1, -3)$ ou no ponto de coordenadas $(-3, h(-3)) = (-3, 7)$, obtendo-se, portanto, duas soluções, cujas equações são $y + 3 = 5.(x+1) \Leftrightarrow y = 5x + 2$ e $y - 7 = 5.(x+3) \Leftrightarrow y = 5x + 22$.



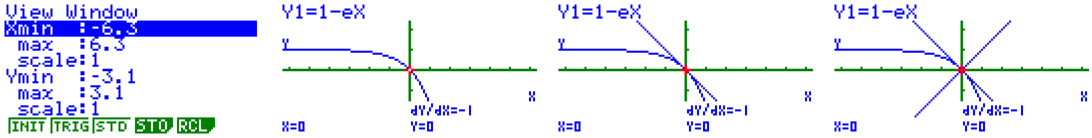
b) Ora, $h(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+2}=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Logo, o declive da recta em questão é $m=h'(\tfrac{1}{2})=\dfrac{5}{(\frac{5}{2})^2}=\dfrac{5\times 4}{25}=\dfrac{4}{5}$ e o ponto de tangência tem de coordenadas $(\tfrac{1}{2},0)$. Portanto, uma equação dessa recta é $y-0=\dfrac{4}{5}(x-\tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow 8x-10y-4=0$, pelo que a alternativa correcta é [C].

7.

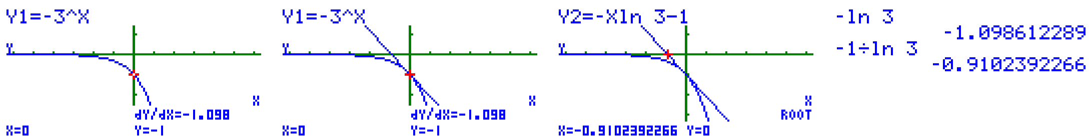
a) Como $f'(x)=(1-e^x)'=-e^x$, o declive da recta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa nula é $m_t=f'(0)=-e^0=-1$, sendo o ponto de tangência a origem do referencial: $(0,f(0))=(0,0)$.

Como a recta pedida é perpendicular a esta, o seu declive será $m_n=-\dfrac{1}{m_t}=1$. Portanto, a recta pedida tem por equação reduzida: $y=x$.

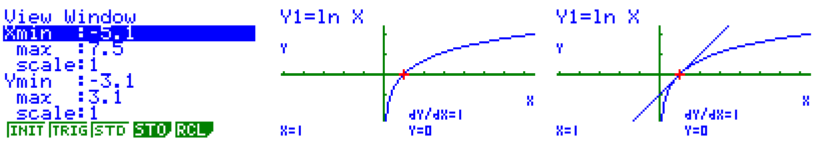


b) Como $g'(x)=(-3^x)'=-3^x\times\ln 3$, o declive da recta tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa nula é $m_t=g'(0)=-3^0\times\ln 3=-\ln 3$, tendo o ponto de tangência as coordenadas $(0,g(0))=(0,-1)$.
Assim, a recta considerada tem por equação $y+1=-\ln 3.(x-0) \Leftrightarrow y=-x.\ln 3-1$.

Como $0=-x.\ln 3-1 \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{\ln 3}$, esta recta intersecta o eixo das abcissas no ponto de coordenadas $(-\dfrac{1}{\ln 3},0)$.



c) Como $h'(x)=(\ln x)'=\dfrac{1}{x}$, o declive da recta tangente ao gráfico de *h* no ponto de abcissa 1 é $m_t=h'(1)=\dfrac{1}{1}=1$, tendo o ponto de tangência as coordenadas $(1,h(1))=(1,0)$.
Assim, a recta pedida tem por equação $y-0=1.(x-1) \Leftrightarrow y=x-1$.



8.

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x}{1-e^x}=\underbrace{\lim_{x\to 0^+}e^x}_{1}\times\underbrace{\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{1-e^x}}_{-\infty}=-\infty$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^{2x}-1}\overset{(\frac{0}{0})}{=}\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}}_{1}\times\lim_{x\to 0}\frac{2x}{e^{2x}-1}=\frac{1}{2}\times\underbrace{\lim_{y\to 0}\frac{y}{e^y-1}}_{fazendo\ y=2x}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{2}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}}{x^8}\overset{(\frac{\infty}{\infty})}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x\times e^{2x}}{x^8}=\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^8}}_{+\infty}\times\underbrace{\lim_{x\to+\infty}e^{2x}}_{+\infty}=+\infty$

d) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^{x+1}-5}{2x}^{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\times(5^x-1)}{2x} = \dfrac{5}{2}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5^x-1}{x} = \dfrac{5}{2}\times\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(e^{\ln 5}\right)^x-1}{x} = \dfrac{5}{2}\times\ln 5\times\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x\ln 5}-1}{x\ln 5}}_{1} = \dfrac{5\ln 5}{2}$

e) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)^2}{2x}^{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\times\ln(x+1)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x} = 1$

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{10}(x+1)^2}{2x}^{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\times\log_{10}(x+1)}{2x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_{10}(x+1)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{\ln(x+1)}{\ln 10}}{x} = \dfrac{1}{\ln 10}\times\underbrace{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}}_{1} = \dfrac{1}{\ln 10}$

g) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x^3}{3x-3}^{\left(\frac{0}{0}\right)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3\times\ln x}{3\times(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln x}{x-1} = 1$

h) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(-2x)}{x} = \underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}}_{-\infty}\times\underbrace{\lim\limits_{x\to 0^-}(\ln(-2x))}_{-\infty} = +\infty$

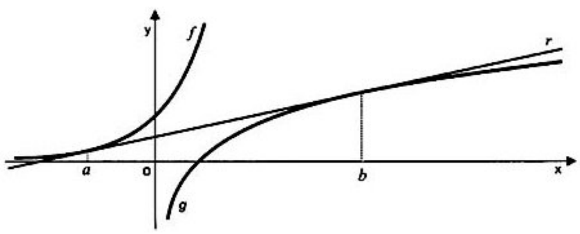
9. Ora, $T'(t) = (100 - a\times e^{-b\times t})' = (-a\times e^{-b\times t})' = -a\times(e^{-b\times t})' = -a\times(-b)\times e^{-b\times t} = ab\times e^{-b\times t}$.
Como $T(30)=50$ e $T'(30)=2$, vem:

$$\begin{cases}100-a\times e^{-30b}=50\\ ab\times e^{-30b}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{50}{e^{-30b}}\\ ab\times e^{-30b}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=\dfrac{50}{e^{-30b}}\\ \dfrac{50}{e^{-30b}}\times b\times e^{-30b}=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1}{25}\\ a=\dfrac{50}{e^{-\frac{6}{5}}}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=\dfrac{1}{25}\\ a=50\times e^{\frac{6}{5}}\end{cases}$$

10. Ora, $pH=3 \Leftrightarrow -\log_{10}x=3 \Leftrightarrow x=10^{-3}$.
Como $\dfrac{d(pH)}{dx}=(-\log_{10}x) = -\dfrac{1}{\ln 10}\times\dfrac{1}{x}$, então $\left(\dfrac{d(pH)}{dx}\right)_{x=10^{-3}} = -\dfrac{1}{\ln 10}\times\dfrac{1}{10^{-3}} = -\dfrac{1000}{\ln 10}$.

11. Na figura ao lado estão representadas graficamente duas funções:

- a função *f*, definida em *IR* por $f(x)=2^x$
- a função *g*, definida em IR^+ por $g(x)=\log_2 x$



a) Mostre que a taxa média de variação de *g* no intervalo $[b, b+3]$ é dada por $\log_8(1+\dfrac{3}{b})$, com $b\in IR^+$.

b) A recta *r* é tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *a* e é tangente ao gráfico de *g* no ponto de abcissa *b*.
Nesta circunstância, mostre que é condição necessária que $2^a = \dfrac{1}{b}\times\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2$, com $b\in IR^+$.

a) $tmv(g)_{[b,\,b+3]} = \dfrac{\log_2(b+3)-\log_2(b)}{3} = \dfrac{1}{3}\times\log_2(\dfrac{b+3}{b}) = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\log_8(\frac{b+3}{b})}{\log_8 2} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{\log_8(\frac{b+3}{b})}{\frac{1}{3}} = \log_8(1+\dfrac{3}{b})$.

b) Tendo em consideração que a derivada de uma função num ponto é o declive da recta tangente ao gráfico dessa função nesse ponto, será então condição necessária $f'(a)=g'(b)$.

Como $f'(x)=\ln 2\times 2^x$ e $g'(x)=\dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{1}{x}$, então $f'(a)=g'(b)\Leftrightarrow \ln 2\times 2^a = \dfrac{1}{\ln 2}\times\dfrac{1}{b}$, donde $2^a = \dfrac{1}{b}\times\left(\dfrac{1}{\ln 2}\right)^2$.

O Professor