Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo de 2003/04 ***Limites, continuidade e assimptotas*** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ____

1. Considere a função *f*, de domínio *IR*, assim definida: $f(x)=\begin{cases} 3-x & \Leftarrow & x<1 \\ \frac{x}{2}+1 & \Leftarrow & x>1 \end{cases}$

a) Represente *f* graficamente.

b) Determine, se existir: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$.

c) Determine, se existir: $\lim\limits_{x\to 0{,}99} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 1{,}0001} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.

2. Supondo que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ e que $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\times g(x)\right]=1$

a) Mostre que $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ não existe.

b) Encontre duas funções *f* e *g* que satisfaçam as condições referidas para, por exemplo, $c=3$.

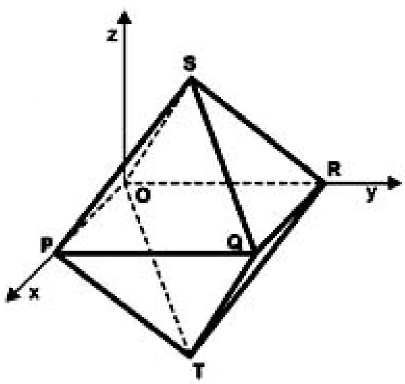
3. Considere as funções *f* e *g*, tais que:

- *f* e *g* são funções contínuas em $[a,b]$
- $f(a)<g(a)$ e $g(b)<f(b)$

Mostre que existe pelo menos um número $c\in\,]a,b[$ tal que $f(c)=g(c)$.

Sugestão: Considere $h(x)=(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, um octaedro regular. Sabe-se que:



- um dos vértices do octaedro é a origem do referencial
- a recta *ST* é paralela ao eixo *Oz*
- o ponto *P* pertence ao semieixo positivo *Ox*
- o ponto *R* pertence ao semieixo positivo *Oy*
- a aresta do octaedro tem comprimento 1

Seja *A* (*x*, 0, 0) um ponto pertencente ao semieixo positivo *Ox* e *B* um ponto pertencente ao semieixo positivo *Oy*, tais que $\overline{OB}=\dfrac{1}{\overline{OA}+1}$.

a) Mostre que o volume da pirâmide [*AOBS*] é dado pela expressão $V(x)=\dfrac{x\sqrt{2}}{12(1+x)}$. ($V_{Pirâmide}=\dfrac{1}{3}\times A_b\times h$)

b) Imagine que o ponto A se desloca sobre o semieixo positivo *Ox*, afastando-se infinitamente da origem do referencial. Para que valor tende, então, o volume da pirâmide?

5. As máquinas de aquecimento de água de uma piscina foram ligadas às 7 horas da manhã de um certo dia.
A temperatura da água, em graus centígrados, *t* horas após as máquinas terem sido ligadas, é dada pela expressão:

$$C(t) = 27 - 18.e^{-t}$$

a) Utilize o teorema de Bolzano-Cauchy para justificar que houve um instante, entre as 9 horas e as 9 horas e trinta minutos, em que a temperatura da água foi de 25º C.

b) Determine analiticamente o instante (aproximação ao minuto) em que a temperatura da água foi de 25º C.

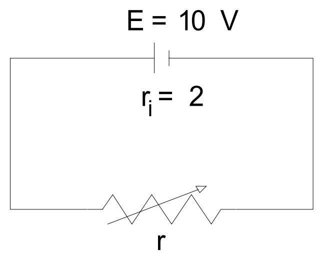
c) Considere agora a função real de variável real, de domínio *IR*:

$$c(x) = 27 - 18.e^{-x}$$

c1) Caracterize a função inversa de *c*.

c2) Averigúe, justificando, a existência de assimptotas ao gráfico de *c*.

6. Para o circuito eléctrico esquematizado na figura ao lado, a potência dissipada na resistência variável é dada, em *Watt*, por



$$P(r) = \frac{100.r}{(r+2)^2} \qquad (\, r \geq 0 \text{ , em } \Omega).$$

a) Calcule $\lim\limits_{r \to +\infty} P(r)$ e interprete o resultado que encontrou.

b) Tenha presente o teorema de Bolzano-Cauchy.

b1) Utilizando a calculadora complete o quadro seguinte.

r (Ω)	0	0,5	1	2	3	6	12	100
P (W) (2 c.d.)								

b2) Utilizando esse teorema, justifique a existência de pelo menos um valor da resistência variável para o qual a potência dissipada é 10 W, isto é, que é possível a equação $P(r) = 10$.

Determine uma aproximação desse (de um desses) valor(es) com erro inferior a 0,1 Ω.

c) Considere agora a função ***q***, de variável real, definida por $q(x) = \dfrac{100x}{(x+2)^2}$.

Estude a existência de assimptotas do gráfico de ***q***, e faça um esboço que mostre o comportamento da função junto das assimptotas.

7. Seja *h* a função real de variável real definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 5 + \dfrac{1}{x} - x & \Leftarrow \quad x < -5 \\ x^2 - a & \Leftarrow \quad -5 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2 - 4} & \Leftarrow \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$.

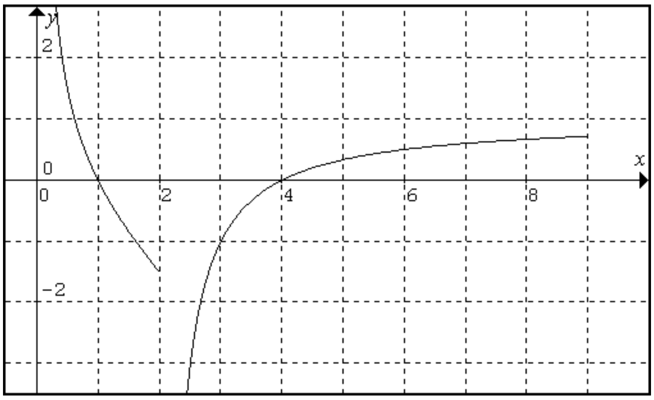
b) Determine *a* de modo que *h* seja contínua em $x = -5$.

c) Justifique que a recta de equação $y = -x + 5$ é assimptota oblíqua de *h* em torno de $-\infty$.

8. Calcule, caso exista, o limite da sucessão assim definida: $n \to w_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n$.

9. Seja ***h*** a função real de variável real, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} - x & \Leftarrow \quad x \le 2 \\ 2 - \dfrac{x}{x-2} & \Leftarrow \quad x > 2 \end{cases}$$

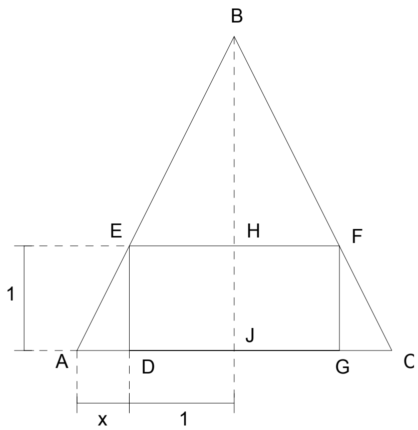


a) Na figura ao lado está representada a função ***f***, restrição de ***h*** ao intervalo $]0, 9]$.
Mostre que *f* não é contínua no ponto $x = 2$.

b) Determine as assimptotas de ***h***.

c) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[2 - \dfrac{1}{x^2 - 4} - h(x) \right]$.

10. Na figura



- o triângulo [ABC] é isósceles ($\overline{AB} = \overline{BC}$)
- [DEFG] é um rectângulo
- $\overline{DG} = 2$; $\overline{DE} = 1$; $\overline{AD} = x$

a) Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada em função de *x*, por

$$a(x) = 2 + x + \frac{1}{x} \qquad (x > 0).$$

NOTA: Pode ser-lhe útil reparar que os triângulos [ADE] e [EHB] são semelhantes.

b) Usando as potencialidades da calculadora gráfica, determine o valor de *x* para o qual a área do triângulo [ABC] é mínima.

c) Estude a existência de assimptotas ao gráfico da função *a*.

NOTA: Tenha presente que $D_a = IR^+$.

11. Considere a função real de variável real definida por $f(x) = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$.

a) Determine o domínio de *f* e os valores de *x* tais que $\dfrac{1}{f(x)} < 2$.

b) Mostre que o gráfico de *f* admite apenas duas assimptotas.

c) Caracterize f^{-1}, função inversa de *f*.

12. Seja *f* a função, de domínio *IR*, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{3 - \sqrt{9 - x}} & \Leftarrow \quad x < 0 \\ 6 & \Leftarrow \quad x = 0 \\ \dfrac{\ln(1 + x) + 5x}{x} & \Leftarrow \quad x > 0 \end{cases}$

a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função *f* quanto à continuidade.

NOTA: Tenha em consideração que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

b) A equação $f(x) = x^2$ tem exactamente duas soluções. Utilizando a sua calculadora, determine-as graficamente. Apresente os valores arredondados às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

13. Estude a continuidade da função $c(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t-2} & \Leftarrow \quad t \neq 2 \\ -1 \quad \Leftarrow \quad t = 2 \end{cases}$, definida em *IR*.

14. Considere a função *f*, real de variável real, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x} & \Leftarrow \quad x \leq 1 \\ \dfrac{8}{x} - 1 & \Leftarrow \quad x > 1 \end{cases}$

a) Calcule $f(1)$ e $f(4)$.

b) Mostre que é falsa a proposição: $\exists c \in \left]1, 4\right[: \ f(c) = \dfrac{1}{2}$.

O resultado obtido contraria o teorema de Bolzano-Cauchy? Justifique a resposta.

c) Determine, se existirem, as assimptotas do gráfico de *f*.

15. Considere as sucessões de termos gerais: $u_n = \dfrac{3n - 1000}{n^2 + n + 5}$; $v_n = \dfrac{3n^3 + 5}{n^3 + 2}$ e $w_n = \dfrac{n^5 + 1}{n^4 + 100}$.

Quais são os valores dos limites $L_1 = \lim\ u_n$, $L_2 = \lim\ v_n$ e $L_3 = \lim\ w_n$?

[A] $L_1 = -200$, $L_2 = \dfrac{5}{2}$, $L_3 = \dfrac{1}{100}$

[B] $L_1 = 3$, $L_2 = 3$, $L_3 = 1$

[C] $L_1 = 0$, $L_2 = +\infty$, $L_3 = +\infty$

[D] $L_1 = 0$, $L_2 = 3$, $L_3 = +\infty$

16. De uma função real de variável real *f* sabe-se que:

$$f(-x) = -f(x), \quad \forall x \in IR \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 2 \qquad f(-5) = 1$$

Pode-se então afirmar que:

[A] $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2 \ \wedge \ f(5) = +1$

[B] $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -2 \ \wedge \ f(5) = -1$

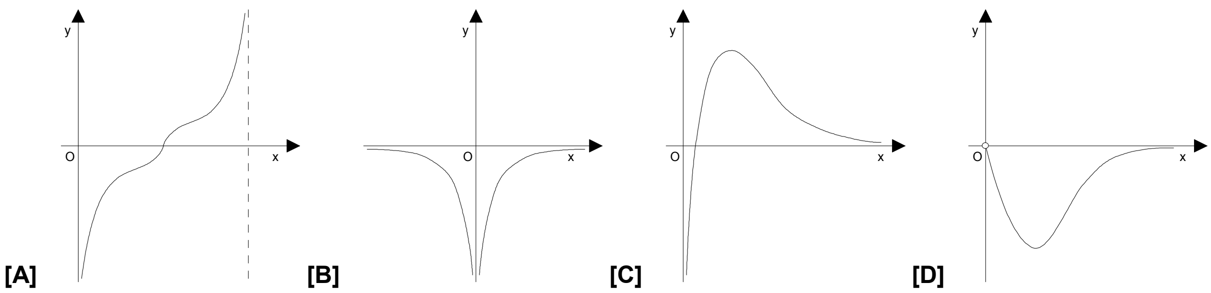
[C] $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +2 \ \wedge \ f(5) = +1$

[D] $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +2 \ \wedge \ f(5) = -1$

17. De uma função h , sabe-se que:

- O domínio de h é IR^+ ; $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$ e $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$.

Indique qual dos gráficos seguintes poderá ser o gráfico de h .



18. Seja g a função definida em *IR* por $g(x) = x^5 - x + 1$.

O Teorema de Bolzano-Cauchy permite-nos afirmar que a equação $g(x) = 8$ tem pelo menos uma solução em

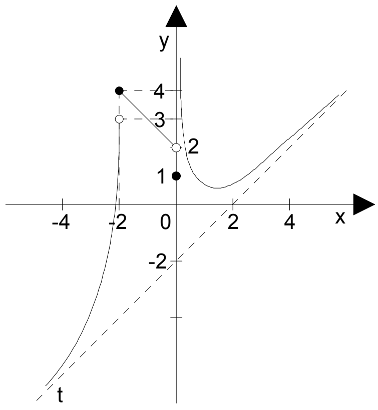
[A] $\left]-1, 0\right[$

[B] $\left]0, 1\right[$

[C] $\left]1, 2\right[$

[D] $\left]2, 3\right[$

19. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função *g*, da qual a recta *t* é uma assimptota.



a) Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

O valor de $\lim\limits_{n \to +\infty} g(u_n)$

[A] é 3 **[B]** é 4

[C] não existe **[D]** é $+\infty$

b) Das afirmações seguintes:

I. *g* é contínua à direita do ponto $x = -2$

II. $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x) - (x-2)] = 0^+$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 4$

III. *g* é contínua no intervalo $]-2, 0[$

IV. $\lim\limits_{x \to -\infty} [g(x) - (x-2)] = 0^+$ e $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$

V. A função *g* satisfaz as condições de aplicabilidade do teorema de Bolzano-Cauchy no intervalo $[-4, -2]$.

são verdadeiras:

[A] Apenas I, III e IV **[B]** Todas **[C]** Apenas I, II, III e IV **[D]** Nenhuma

20. De uma função *h*, <u>contínua em *IR*</u>, sabe-se que:

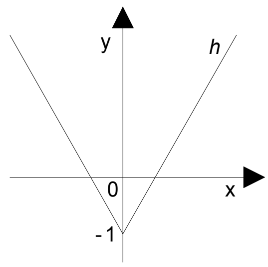
- $h(-2) = 3$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$
- a recta de equação $y = -4$ é assimptota do gráfico de *h*
- *h* é estritamente crescente no intervalo $]-\infty, -2]$ e estritamente decrescente no intervalo $[-2, +\infty[$

Qual das afirmações é verdadeira?

[A] A função tem três zeros **[B]** $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = -\infty$

[C] $h(0) > -4$ **[D]** O contradomínio de *h* é $]-\infty, 3[$

21. A figura representa parte de duas semi-rectas que são o gráfico de uma função *h*, de domínio *IR*, que tem *Oy* como eixo de simetria. O contradomínio da função $x \to 2^{h(x)}$ é:



[A] $[-1, +\infty[$ **[B]** $[-2, +\infty[$

[C] $]0, +\infty[$ **[D]** $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

22. Seja *g*: $x \to \begin{cases} x^2 - k & \Leftarrow & x \neq 0 \\ 1 & \Leftarrow & x = 0 \end{cases}$.

O valor de *k* para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função *g* no intervalo $[-1, 1]$ é:

[A] 1 **[B]** $\frac{1}{2}$ **[C]** -1 **[D]** $-\frac{1}{2}$

23. Considere a função *m* definida por $m(x) = \begin{cases} x + e^{2x} + k & \Leftarrow & x \leq 0 \\ \ln \frac{1 + x^2}{e} & \Leftarrow & x > 0 \end{cases}$.

O valor de *k* para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função *m* no intervalo $\left[-\frac{1}{e}, e\right]$ é:

[A] $-e + 1$ **[B]** 1 **[C]** $\frac{1}{e}$ **[D]** -2

SOLUÇÕES

1.

b) 2; 2; 2.

c) 2,01; 1,50005; não existe.

2.

b) Por exemplo, $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

4.

b) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ unidades de volume.

5.

b) A temperatura da água foi de 25º C aproximadamente às 9 horas e 12 minutos.

c1)

$$c^{-1}: \left]-\infty, 27\right[\to IR$$
$$x \to \ln \tfrac{18}{27-x}$$

c2) $y = 27$ é equação de uma assimptota horizontal do gráfico da função na vizinhança de $+\infty$.

6.

a) $\lim\limits_{r \to +\infty} P(r) = 0$.

b2) Por exempo, uma aproximação desse valor, com erro inferior a 0,1 Ω, é $r = 5{,}2\ \Omega$.

c) $x = -2$ é equação de uma assimptota vertical bilateral; $y = 0$ é equação de uma assimptota horizontal bilateral.

7.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = +\infty$.

b) $a = \frac{174}{5}$.

8. $\lim\left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = +\infty$.

9.

b) $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral; $x = 2$ é equação de uma assimptota vertical unilateral direita; $y = 1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$; $y = -x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[2 - \frac{1}{x^2 - 4} - h(x)\right] = +\infty$.

10.

b) De acordo com os resultados obtidos com a calculadora gráfica, a área do triângulo [ABC] é mínima para $x = 1$.

c) A recta de equação $x = 0$ é uma assimptota vertical do gráfico da função; $y = x + 2$ é equação de uma assimptota oblíqua do gráfico da função.

11.

a) $D_f = \left]1, 2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$; $x \in \left]1, e^2 + 1\right[\setminus \{2\}$.

b) Apenas a recta de equação $x = 2$ é uma assimptota vertical bilateral do gráfico de *f;* a recta de equação $y = 0$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *f* na vizinhança de $+\infty$.

c)

$$f^{-1}: IR \setminus \{0\} \to \left]1, +\infty\right[\setminus \{2\}$$
$$x \to 1 + e^{\frac{1}{x}}$$

12.

a) A função é contínua em *IR*.

b) As soluções da equação, com aproximação às décimas, são $-2{,}5$ e $2{,}3$.

13.

a) A função é contínua em *IR*.

b) As soluções da equação, com aproximação às décimas, são $-2{,}5$ e $2{,}3$.

14.

a) $f(1) = 0$ e $f(4) = 1$.

b) O resultado obtido não contraria o teorema de Bolzano-Cauchy, pois *f* não é uma função contínua em $[1, 4]$, visto não ser contínua à direita de $x = 1$.

c) $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral; $y = -1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$; $y = x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

15. D

16. B

17. C

18. C

19.

a) B

b) A

20. C

21. D

22. C

23. D

O Professor