Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo de 2003/04 *Limites, continuidade e assimptotas* **12.º Ano**

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma:____

1. Considere a função *f*, de domínio *IR*, assim definida: $f(x)=\begin{cases}3-x & \Leftarrow & x<1\\ \frac{x}{2}+1 & \Leftarrow & x>1\end{cases}$

a) Represente *f* graficamente.

b) Determine, se existir: $\lim_{x\to 2^+} f(x)$; $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ e $\lim_{x\to 2} f(x)$.

c) Determine, se existir: $\lim_{x\to 0{,}99} f(x)$; $\lim_{x\to 1{,}0001} f(x)$ e $\lim_{x\to 1} f(x)$.

2. Supondo que $\lim_{x\to c} f(x)=0$ e que $\lim_{x\to c}\left[f(x)\times g(x)\right]=1$

a) Mostre que $\lim_{x\to c} g(x)$ não existe.

b) Encontre duas funções *f* e *g* que satisfaçam as condições referidas para, por exemplo, $c=3$.

3. Considere as funções *f* e *g*, tais que:

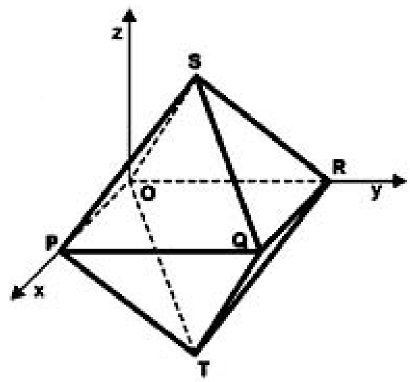
- *f* e *g* são funções contínuas em $[a,b]$
- $f(a)<g(a)$ e $g(b)<f(b)$

Mostre que existe pelo menos um número $c\in\left]a,b\right[$ tal que $f(c)=g(c)$.

Sugestão: Considere $h(x)=(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.

4. Na figura está representado, em referencial o.n. *Oxyz*, um octaedro regular. Sabe-se que:

- um dos vértices do octaedro é a origem do referencial
- a recta *ST* é paralela ao eixo *Oz*
- o ponto *P* pertence ao semieixo positivo *Ox*
- o ponto *R* pertence ao semieixo positivo *Oy*
- a aresta do octaedro tem comprimento 1



Seja *A* (*x*, 0, 0) um ponto pertencente ao semieixo positivo *Ox* e *B* um ponto pertencente ao semieixo positivo *Oy*, tais que $\overline{OB}=\dfrac{1}{\overline{OA}+1}$.

a) Mostre que o volume da pirâmide [*AOBS*] é dado pela expressão $V(x)=\dfrac{x\sqrt{2}}{12(1+x)}$. $\left(V_{Pirâmide}=\dfrac{1}{3}\times A_b\times h\right)$

b) Imagine que o ponto A se desloca sobre o semieixo positivo *Ox*, afastando-se infinitamente da origem do referencial. Para que valor tende, então, o volume da pirâmide?

5. As máquinas de aquecimento de água de uma piscina foram ligadas às 7 horas da manhã de um certo dia. A temperatura da água, em graus centígrados, *t* horas após as máquinas terem sido ligadas, é dada pela expressão:

$$C(t) = 27 - 18.e^{-t}$$

a) Utilize o teorema de Bolzano-Cauchy para justificar que houve um instante, entre as 9 horas e as 9 horas e trinta minutos, em que a temperatura da água foi de 25º C.

b) Determine analiticamente o instante (aproximação ao minuto) em que a temperatura da água foi de 25º C.

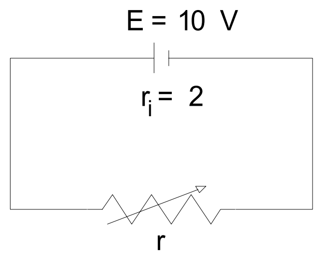
c) Considere agora a função real de variável real, de domínio *IR*:

$$c(x) = 27 - 18.e^{-x}$$

c1) Caracterize a função inversa de *c*.

c2) Averigúe, justificando, a existência de assimptotas ao gráfico de *c*.

6. Para o circuito eléctrico esquematizado na figura ao lado, a potência dissipada na resistência variável é dada, em *Watt*, por



$$P(r) = \frac{100.r}{(r+2)^2} \qquad (\, r \geq 0 \text{ , em } \Omega).$$

a) Calcule $\lim\limits_{r \to +\infty} P(r)$ e interprete o resultado que encontrou.

b) Tenha presente o teorema de Bolzano-Cauchy.

b1) Utilizando a calculadora complete o quadro seguinte.

r (Ω)	0	0,5	1	2	3	6	12	100
P (*W*) (2 c.d.)								

b2) Utilizando esse teorema, justifique a existência de pelo menos um valor da resistência variável para o qual a potência dissipada é 10 W, isto é, que é possível a equação $P(r) = 10$.

Determine uma aproximação desse (de um desses) valor(es) com erro inferior a 0,1 Ω.

c) Considere agora a função ***q***, de variável real, definida por $q(x) = \dfrac{100x}{(x+2)^2}$.

Estude a existência de assimptotas do gráfico de ***q***, e faça um esboço que mostre o comportamento da função junto das assimptotas.

7. Seja *h* a função real de variável real definida por:

$$h(x) = \begin{cases} 5 + \dfrac{1}{x} - x & \Leftarrow \quad x < -5 \\ x^2 - a & \Leftarrow \quad -5 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2 - 4} & \Leftarrow \quad x > 2 \end{cases}$$

a) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x)$.

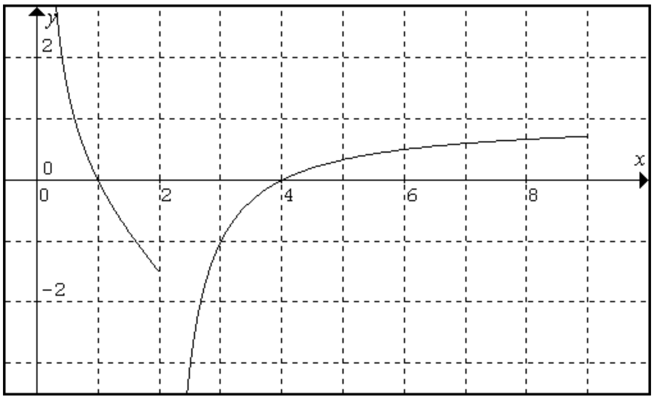
b) Determine *a* de modo que *h* seja contínua em $x = -5$.

c) Justifique que a recta de equação $y = -x + 5$ é assimptota oblíqua de *h* em torno de $-\infty$.

8. Calcule, caso exista, o limite da sucessão assim definida: $n \to w_n = \sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n$.

9. Seja ***h*** a função real de variável real, de domínio $IR \setminus \{0\}$, definida por:

$$h(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}-x & \Leftarrow \quad x\le 2\\[2mm] 2-\dfrac{x}{x-2} & \Leftarrow \quad x>2\end{cases}$$



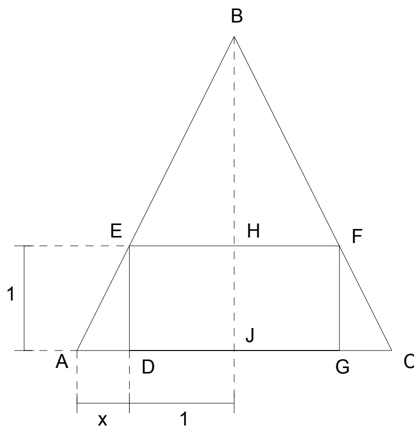
a) Na figura ao lado está representada a função ***f***, restrição de ***h*** ao intervalo $]0,9]$.
Mostre que *f* não é contínua no ponto $x=2$.

b) Determine as assimptotas de ***h***.

c) Calcule, caso exista, $\lim\limits_{x\to 2^+}\left[2-\dfrac{1}{x^2-4}-h(x)\right]$.

10. Na figura

- o triângulo [ABC] é isósceles ($\overline{AB}=\overline{BC}$)
- [DEFG] é um rectângulo
- $\overline{DG}=2$; $\overline{DE}=1$; $\overline{AD}=x$



a) Mostre que a área do triângulo [ABC] é dada em função de *x*, por

$$a(x)=2+x+\frac{1}{x} \qquad (\,x>0\,).$$

NOTA: Pode ser-lhe útil reparar que os triângulos [ADE] e [EHB] são semelhantes.

b) Usando as potencialidades da calculadora gráfica, determine o valor de *x* para o qual a área do triângulo [ABC] é mínima.

c) Estude a existência de assimptotas ao gráfico da função *a*.

NOTA: Tenha presente que $D_a=IR^+$.

11. Considere a função real de variável real definida por $f(x)=\dfrac{1}{\ln(x-1)}$.

a) Determine o domínio de *f* e os valores de *x* tais que $\dfrac{1}{f(x)}<2$.

b) Mostre que o gráfico de *f* admite apenas duas assimptotas.

c) Caracterize f^{-1}, função inversa de *f*.

12. Seja *f* a função, de domínio *IR*, definida por $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{3-\sqrt{9-x}} & \Leftarrow \quad x<0\\ 6 & \Leftarrow \quad x=0\\ \dfrac{\ln(1+x)+5x}{x} & \Leftarrow \quad x>0\end{cases}$

a) Utilizando métodos exclusivamente analíticos, estude a função *f* quanto à continuidade.

NOTA: Tenha em consideração que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

b) A equação $f(x)=x^2$ tem exactamente duas soluções. Utilizando a sua calculadora, determine-as graficamente. Apresente os valores arredondados às décimas. Explique como procedeu, apresentando o gráfico, ou gráficos, obtido(s) na calculadora.

13. Estude a continuidade da função $c(t)=\begin{cases}\dfrac{t^2-5t+6}{t-2} & \Leftarrow \quad t\neq 2\\ -1 \quad \Leftarrow \quad t=2\end{cases}$, definida em *IR*.

14. Considere a função *f*, real de variável real, de domínio $IR\setminus\{0\}$, definida por: $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x} & \Leftarrow \quad x\leq 1\\ \dfrac{8}{x}-1 & \Leftarrow \quad x>1\end{cases}$

a) Calcule $f(1)$ e $f(4)$.

b) Mostre que é falsa a proposição: $\exists c\in\left]1,\ 4\right[\ :\ f(c)=\dfrac{1}{2}$.

O resultado obtido contraria o teorema de Bolzano-Cauchy? Justifique a resposta.

c) Determine, se existirem, as assimptotas do gráfico de *f*.

15. Considere as sucessões de termos gerais: $u_n=\dfrac{3n-1000}{n^2+n+5}$; $v_n=\dfrac{3n^3+5}{n^3+2}$ e $w_n=\dfrac{n^5+1}{n^4+100}$.

Quais são os valores dos limites $L_1=\lim\ u_n$, $L_2=\lim\ v_n$ e $L_3=\lim\ w_n$?

[A] $L_1=-200$, $L_2=\dfrac{5}{2}$, $L_3=\dfrac{1}{100}$

[B] $L_1=3$, $L_2=3$, $L_3=1$

[C] $L_1=0$, $L_2=+\infty$, $L_3=+\infty$

[D] $L_1=0$, $L_2=3$, $L_3=+\infty$

16. De uma função real de variável real *f* sabe-se que:

$$f(-x)=-f(x),\ \ \forall x\in IR \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \qquad f(-5)=1$$

Pode-se então afirmar que:

[A] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2\ \wedge\ f(5)=+1$

[B] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2\ \wedge\ f(5)=-1$

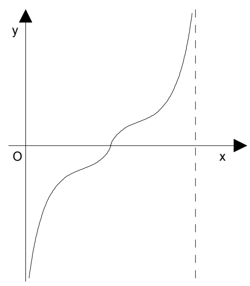
[C] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+2\ \wedge\ f(5)=+1$

[D] $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+2\ \wedge\ f(5)=-1$

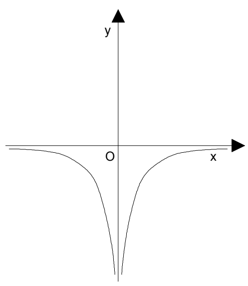
17. De uma função h , sabe-se que:

- O domínio de h é IR^+ ; $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to 0} h(x)=-\infty$.

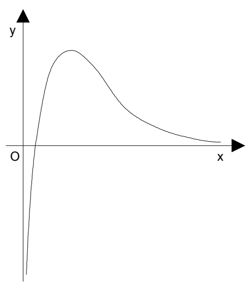
Indique qual dos gráficos seguintes poderá ser o gráfico de h .



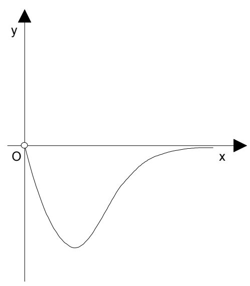
[A]



[B]



[C]



[D]

18. Seja g a função definida em *IR* por $g(x)=x^5-x+1$.

O Teorema de Bolzano-Cauchy permite-nos afirmar que a equação $g(x)=8$ tem pelo menos uma solução em

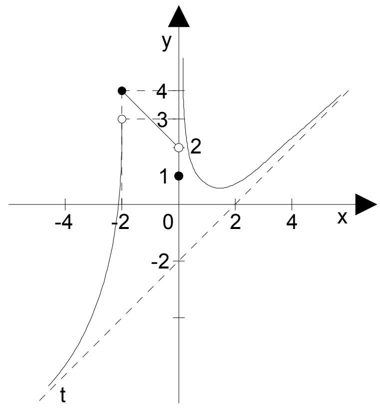
[A] $\left]-1,\ 0\right[$

[B] $\left]0,\ 1\right[$

[C] $\left]1,\ 2\right[$

[D] $\left]2,\ 3\right[$

19. Na figura ao lado está parte da representação gráfica de uma função *g*, da qual a recta *t* é uma assimptota.



a) Considere a sucessão de termo geral $u_n = \frac{1}{n} - 2$.

O valor de $\lim\limits_{n\to+\infty} g(u_n)$

[A] é 3 **[B]** é 4

[C] não existe **[D]** é $+\infty$

b) Das afirmações seguintes:

I. *g* é contínua à direita do ponto $x = -2$

II. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[g(x)-(x-2)\right] = 0^+$ e $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 4$

III. *g* é contínua no intervalo $\left]-2, 0\right[$

IV. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[g(x)-(x-2)\right] = 0^+$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

V. A função *g* satisfaz as condições de aplicabilidade do teorema de Bolzano-Cauchy no intervalo $\left[-4, -2\right]$.

são verdadeiras:

[A] Apenas I, III e IV **[B]** Todas **[C]** Apenas I, II, III e IV **[D]** Nenhuma

20. De uma função *h*, <u>contínua em *IR*</u>, sabe-se que:

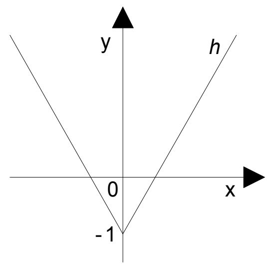
- $h(-2) = 3$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -\infty$
- a recta de equação $y = -4$ é assimptota do gráfico de *h*
- *h* é estritamente crescente no intervalo $\left]-\infty, -2\right]$ e estritamente decrescente no intervalo $\left[-2, +\infty\right[$

Qual das afirmações é verdadeira?

[A] A função tem três zeros **[B]** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = -\infty$

[C] $h(0) > -4$ **[D]** O contradomínio de *h* é $\left]-\infty, 3\right[$

21. A figura representa parte de duas semi-rectas que são o gráfico de uma função *h*, de domínio *IR*, que tem *Oy* como eixo de simetria. O contradomínio da função $x \to 2^{h(x)}$ é:



[A] $\left[-1, +\infty\right[$ **[B]** $\left[-2, +\infty\right[$

[C] $\left]0, +\infty\right[$ **[D]** $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

22. Seja *g*: $x \to \begin{cases} x^2 - k & \Leftarrow & x \neq 0 \\ 1 & \Leftarrow & x = 0 \end{cases}$.

O valor de *k* para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função *g* no intervalo $\left[-1, 1\right]$ é:

[A] 1 **[B]** $\frac{1}{2}$ **[C]** -1 **[D]** $-\frac{1}{2}$

23. Considere a função *m* definida por $m(x) = \begin{cases} x + e^{2x} + k & \Leftarrow & x \leq 0 \\ \ln\frac{1+x^2}{e} & \Leftarrow & x > 0 \end{cases}$.

O valor de *k* para o qual é possível aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função *m* no intervalo $\left[-\frac{1}{e}, e\right]$ é:

[A] $-e+1$ **[B]** 1 **[C]** $\frac{1}{e}$ **[D]** -2

SOLUÇÕES

1.

b) 2; 2; 2.

c) 2,01; 1,50005; não existe.

2.

b) Por exemplo, $f(x) = x - 3$ e $g(x) = \frac{1}{x-3}$.

4.

b) $\frac{\sqrt{2}}{12}$ unidades de volume.

5.

b) A temperatura da água foi de 25º C aproximadamente às 9 horas e 12 minutos.

c1)

$$c^{-1}: \ \left]-\infty, 27\right[\to IR$$
$$x \to \ln \frac{18}{27-x}$$

c2) $y = 27$ é equação de uma assimptota horizontal do gráfico da função na vizinhança de $+\infty$.

6.

a) $\lim\limits_{r \to +\infty} P(r) = 0$.

b2) Por exempo, uma aproximação desse valor, com erro inferior a 0,1 Ω, é $r = 5{,}2\ \Omega$.

c) $x = -2$ é equação de uma assimptota vertical bilateral; $y = 0$ é equação de uma assimptota horizontal bilateral.

7.

a) $\lim\limits_{x \to 2^+} h(x) = +\infty$.

b) $a = \frac{174}{5}$.

8. $\lim \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \left(\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = +\infty$.

9.

b) $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral; $x = 2$ é equação de uma assimptota vertical unilateral direita; $y = 1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$; $y = -x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

c) $\lim\limits_{x \to 2^+} \left[2 - \frac{1}{x^2 - 4} - h(x)\right] = +\infty$.

10.

b) De acordo com os resultados obtidos com a calculadora gráfica, a área do triângulo [ABC] é mínima para $x = 1$.

c) A recta de equação $x = 0$ é uma assimptota vertical do gráfico da função; $y = x + 2$ é equação de uma assimptota oblíqua do gráfico da função.

11.

a) $D_f = \left]1, 2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$; $x \in \left]1,\ e^2 + 1\right[\setminus \{2\}$.

b) Apenas a recta de equação $x = 2$ é uma assimptota vertical bilateral do gráfico de *f;* a recta de equação $y = 0$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *f* na vizinhança de $+\infty$.

c)

$$f^{-1}: \ iR \setminus \{0\} \to \left]1, +\infty\right[\setminus \{2\}$$
$$x \to 1 + e^{\frac{1}{x}}$$

12.

a) A função é contínua em *IR*.

b) As soluções da equação, com aproximação às décimas, são $-2{,}5$ e $2{,}3$.

13.

a) A função é contínua em *IR*.

b) As soluções da equação, com aproximação às décimas, são $-2{,}5$ e $2{,}3$.

14.

a) $f(1) = 0$ e $f(4) = 1$.

b) O resultado obtido não contraria o teorema de Bolzano-Cauchy, pois *f* não é uma função contínua em $[1, 4]$, visto não ser contínua à direita de $x = 1$.

c) $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral; $y = -1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$; $y = x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

15. D

16. B

17. C

18. C

19.

a) B

b) A

20. C

21. D

22. C

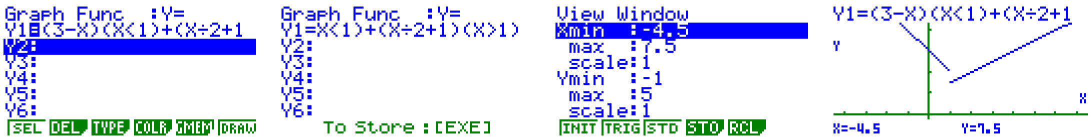
23. D

O Professor

Proposta de Resolução:

1.

a)



b) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(\frac{x}{2}+1)=2$; $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(\frac{x}{2}+1)=2$; $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=2$, pois $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=2$.

c) $\lim\limits_{x\to 0{,}99} f(x)=\lim\limits_{x\to 0{,}99}(3-x)=2{,}01$; $\lim\limits_{x\to 1{,}0001} f(x)=\lim\limits_{x\to 1{,}0001}(\frac{x}{2}+1)=1{,}50005$; Não existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$, visto que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, pois $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(3-x)=2$ e $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(\frac{x}{2}+1)=1{,}5$.

2.

a) Admitamos que existe $\lim\limits_{x\to c} g(x)$, isto é, que $\lim\limits_{x\to c} g(x)=b$, com $b\in IR$.

Assim, $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\times g(x)\right]=\lim\limits_{x\to c} f(x)\times\lim\limits_{x\to c} g(x)=0\times b=0$, o que contraria a hipótese, pois $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ e $\lim\limits_{x\to c}\left[f(x)\times g(x)\right]=1$. Logo, não existe $\lim\limits_{x\to c} g(x)$.

b) Por exemplo, $f(x)=x-3$ e $g(x)=\dfrac{1}{x-3}$.

3. Seja $h(x)=(f-g)(x)=f(x)-g(x)$.

Como *f* e *g* são funções contínuas em $[a,b]$, então *h* é também contínua em $[a,b]$, pois é a diferença de duas funções contínuas nesse mesmo intervalo.
Ora,

- $h(a)=f(a)-g(a)<0$, pois $f(a)<g(a)\Leftrightarrow f\,/\,a)-g(a)<0$.
- $h(b)=f(b)-g(b)>0$, pois $g(b)<f(b)\Leftrightarrow f(b)-g(b)>0$.

Logo, de acordo com o teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists c\in\left]a,\,b\right[:h(c)=0$.

Assim, como $h(c)=0\Leftrightarrow f(c)-g(c)=0\Leftrightarrow f(c)=g(c)$, ter-se-á que $\exists c\in[a,\,b]:f(c)=g(c)$, visto que $\left]a,b\right[\subset[a,\,b]$.

4.

a) Sendo S' a projecção ortogonal do ponto S sobre o plano *xOy*, podemos considerar $\overline{SS'}$ para altura da pirâmide, sendo $\overline{SS'}=\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, por aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo rectângulo [SS'Q] (note que [OQ] é diagonal de um quadrado de lado 1). Considerando o triângulo [AOB] para base da pirâmide, vem: $V=\frac{1}{3}\times\frac{\overline{AO}\times\overline{OB}}{2}\times\overline{SS'}=\frac{1}{6}\times x\times\frac{1}{x+1}\times\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{x\sqrt{2}}{12(1+x)}$, como queríamos mostrar.

b) Se o ponto A se desloca sobre o semieixo positivo *Ox*, afastando-se infinitamente da origem do referencial, então $x\to+\infty$.

Ora, $\lim\limits_{x\to+\infty} V(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\sqrt{2}}{12(1+x)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{2}}{12(\frac{1}{x}+1)}=\dfrac{\sqrt{2}}{12}$, pelo que nessa circunstância o volume da pirâmide tende para $\dfrac{\sqrt{2}}{12}$ unidades de volume.

5.

a) Consideremos a função C e o intervalo $[2;2{,}5]$.
A função C é contínua no intervalo considerado, pois sendo a composta de funções contínuas é contínua no seu domínio; consequentemente é contínua em qualquer intervalo fechado contido no seu domínio.
Ora,

- $C(2) = 27 - 18 \times e^{-2} \approx 24{,}56$
- $C(2{,}5) = 27 - 18 \times e^{-2{,}5} \approx 25{,}52$

Portanto, $C(2) < 25 < C(2{,}5)$.

Assim, de acordo com o teorema de Bolzano-Cauchy, $\exists t_1 \in]2;2{,}5[: C(t_1) = 25$.

Consequentemente, houve um instante, entre as 9 horas e as nove horas e trinta minutos, em que a temperatura da água foi de 25º C.

b) Ora, $C(t) = 25 \Leftrightarrow 27 - 18.e^{-t} = 25 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow -t = \ln\frac{1}{9} \Leftrightarrow -t = 0 - \ln 9 \Leftrightarrow t = \ln 9$.

Como $\ln 9 \approx 2{,}19722$ e $60 \times 0{,}19722 = 11{,}8322$, então a temperatura da água foi de 25º C aproximadamente às 9 horas e 12 minutos.

c1) Sendo $y = 27 - 18.e^{-x}$, vem $e^{-x} = \frac{27-y}{18} \Leftrightarrow -x = \ln\frac{27-y}{18} \Leftrightarrow x = -\ln\frac{27-y}{18} \Leftrightarrow x = \ln\frac{18}{27-y}$.

Como $D_c = \{x \in IR : -x \in IR\} = IR$ e $D'_c = \{y \in IR : \frac{18}{27-y} > 0\} =]-\infty, 27[$, será: $c^{-1}:]-\infty, 27[\to IR$, $x \to \ln\frac{18}{27-x}$

c2) Como a função é contínua em IR, então $\lim_{x \to a^{\pm}} c(x) = c(a), \forall a \in IR$.

Assim, não existe qualquer assimptota vertical ao gráfico de c, pois $\lim_{x \to a^{\pm}} c(x)$ é finito para todo o a real.

Determinação das assimptotas não verticais:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{27 - 18.e^{-x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{27}{x} - \frac{18}{x}e^{-x}\right) = 0 - 0 \times 0 = 0;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (c(x) - 0 \times x) = \lim_{x\to+\infty} (27 - 18.e^{-x}) = 27 - 18 \times 0 = 27.$$

Logo, $y = 27$ é equação de uma assimptota horizontal do gráfico da função na vizinhança de $+\infty$.

Como $\lim_{x\to-\infty} \frac{c(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{27 - 18.e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{27}{x} - 18\frac{e^{-x}}{x}\right) = 0 - 18 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{-y} = 18 \times \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty$, o gráfico da função não admite qualquer assimptota não vertical na vizinhança de $-\infty$.

6.

a) $$\lim_{r\to+\infty} P(r) = \lim_{r\to+\infty} \frac{100.r}{(r+2)^2} = \lim_{r\to+\infty} \frac{100.r}{r^2 + 4r + 4} = \lim_{r\to+\infty} \frac{\frac{100}{r}}{1 + \frac{4}{r} + \frac{4}{r^2}} = \lim_{r\to+\infty} \frac{100}{r} \times \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{r} + \frac{4}{r^2}} = 0 \times 1 = 0.$$

A potência dissipada na resistência variável aproxima-se tanto quanto se queira de zero, desde que o valor da resistência seja suficientemente elevado. (A potência dissipada na resistência variável será praticamente nula quando o valor da resistência for suficientemente elevado.)

b1)

r (Ω)	0	0,5	1	2	3	6	12	100
P (W) (2 c.d.)	0	8,00	11,11	12,50	12,00	9,38	6,12	0,96

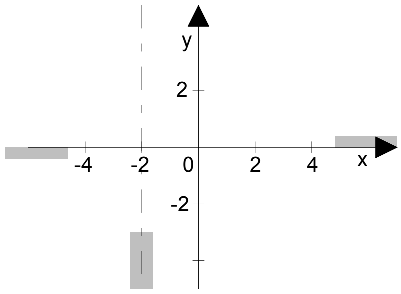
b2) *Por exemplo*:
No intervalo [3, 6] a função é contínua, pois é o quociente de funções contínuas, não se anulando a função divisor nesse intervalo. Logo, de acordo com o teorema de Bolzano-Cauchy, a função assume todos os valores compreendidos entre $P(6)$ e $P(3)$, em particular $\exists r \in]3,6[: P(r) = 10$.

Como $\left\langle \begin{array}{l} P(4) \approx 11{,}11 \\ P(5) \approx 10{,}20 \end{array} \right. \to \left\langle \begin{array}{l} P(5{,}5) \approx 9{,}78 \\ P(5{,}2) \approx 10{,}03 \end{array} \right. \to \left\langle \begin{array}{l} P(5{,}3) \approx 9{,}95 \\ P(5{,}2) \approx 10{,}03 \end{array} \right.$, então uma aproximação desse valor, com erro inferior a 0,1 Ω, é $r = 5{,}2\ \Omega$.

c) *Determinação das assimptotas verticais*:
A função é contínua no seu domínio ($IR \setminus \{-2\}$), logo o seu gráfico apenas poderá ter assimptota vertical no ponto $x=-2$:

Ora, $\lim\limits_{x\to -2^{\mp}} q(x) = \lim\limits_{x\to -2^{\mp}} \dfrac{100x}{(x+2)^2} = -200 \times \lim\limits_{x\to -2^{\mp}} \dfrac{1}{(x+2)^2} = -\infty$.

Logo, $x=-2$ é equação de uma assimptota vertical bilateral.



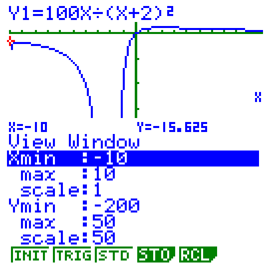
Determinação das assimptotas não verticais:

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{q(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{100}{(x+2)^2} = 0\,;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} (q(x) - 0\times x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{100x}{(x+2)^2} = 0^{\pm}\,.$$ (ver alínea **a)**)

Logo, $y=0$ é equação de uma assimptota horizontal bilateral.

Na figura ao lado apresenta-se o comportamento da função junto das assimptotas (o gráfico aproxima-se da assimptota na região cinzenta).



7.

a) $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2} - \dfrac{1}{x^2-4}\right)^{(\infty-\infty)} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+2-1}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x+1}{x^2-4} = 3\times \underbrace{\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{x^2-4}}_{+\infty} = +\infty$.

b) Ora,

$$\lim_{x\to -5^-} h(x) = \lim_{x\to -5^-} \left(5+\frac{1}{x}-x\right) = 5-\frac{1}{5}+5 = \frac{49}{5}\,;$$

$$\lim_{x\to -5^+} h(x) = \lim_{x\to -5^-} (x^2-a) = 25-a\,;$$

$$h(-5) = (-5)^2 - a = 25-a\,.$$

Para que *h* seja contínua em $x=-5$, terá de ser $\lim\limits_{x\to -5^-} h(x) = \lim\limits_{x\to -5^+} h(x) = h(-5)$, logo $25-a = \dfrac{49}{5} \Leftrightarrow a = \dfrac{174}{5}$.

c) A recta de equação $y=-x+5$ é assimptota oblíqua de *h* em torno de $-\infty$ se e só se $\lim\limits_{x\to -\infty} (h(x)-y) = 0$.

Como $\lim\limits_{x\to -\infty} (h(x)-y) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(5+\dfrac{1}{x}-x-(-x+5)\right) = \lim\limits_{x\to -\infty} \left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, então a recta de equação $y=-x+5$ é assimptota oblíqua de *h* na vizinhança de $-\infty$.

8. $\lim \left(\sqrt{n} - \sqrt{n+1} + \left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n\right) = \lim \dfrac{(\sqrt{n}-\sqrt{n+1})(\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} + \lim \left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n = \underbrace{\lim \dfrac{n-n-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}}_{0} + \underbrace{\lim \left(\dfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)^n}_{+\infty} = +\infty$.

Note que $\dfrac{\pi}{\sqrt{2}} > 1$.

9.

a) A função *f* não é contínua em $x=2$, pois não existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$, dado que $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$.

Com efeito, $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \left(\dfrac{1}{x}-x\right) = -\dfrac{3}{2}$ e $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \left(2-\dfrac{x}{x-2}\right) = 2 - 2\times \underbrace{\lim\limits_{x\to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}\right)}_{+\infty} = -\infty$

b) *Determinação das assimptotas verticais*:
A função *h* é contínua em $]-\infty, 0[$, em $]0, 2[$ e em $]0, +\infty[$, em virtude de nesses intervalos ser definida pela soma de funções contínuas nesses mesmos intervalos. Logo, o seu gráfico apenas poderá ter assimptotas verticais nos pontos $x=0$ e $x=2$:

$$\lim_{x\to 0^{\mp}} h(x) = \lim_{x\to 0^{\mp}} \left(\frac{1}{x}-x\right) = \mp\infty$$

Logo, $x=0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral. (A lateral direita já observável no gráfico de *f*)

Da alínea **a)**, $\lim\limits_{x\to 2^+} h(x) = -\infty$ e $\lim\limits_{x\to 2^-} h(x) = -\dfrac{3}{2}$.

Logo, $x=2$ é equação de uma assimptota vertical unilateral direita. (Já observável no gráfico de *f*)

Determinação das assimptotas não verticais:

$$m_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{h(x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x-2}\right) = 0\ ;$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty} (h(x) - 0\times x) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 - \frac{x}{x-2}\right) = 2 - 1 = 1\ .$$

Logo, $y = 1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$. (Já observável no gráfico de *f*)

$$m_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{h(x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x^2} - 1\right) = -1\ ;$$

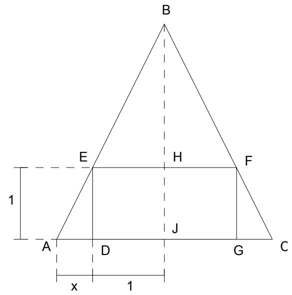
$$b_2 = \lim_{x\to-\infty} (h(x) + x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{1}{x} - x + x\right) = 0\ .$$

Logo, $y = -x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

c) $$\lim_{x\to2^+}\left[2 - \frac{1}{x^2-4} - h(x)\right] = \lim_{x\to2^+}\left(2 - \frac{1}{x^2-4} - 2 + \frac{x}{x-2}\right)^{(-\infty+\infty)} = \lim_{x\to2^+} \frac{x^2+2x-1}{x^2-4} = 7 \times \underbrace{\lim_{x\to2^+} \frac{1}{x^2-4}}_{+\infty} = +\infty\ .$$

10.

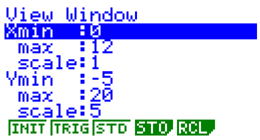
a) Tendo em consideração a sugestão, é $\frac{\overline{BH}}{\overline{ED}} = \frac{\overline{EH}}{\overline{AD}}$, donde $\frac{\overline{BH}}{1} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \overline{BH} = \frac{1}{x}$.

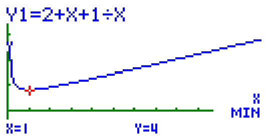


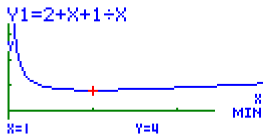
Assim, $A_{[ABC]} = A_{[DEFG]} + 2\times A_{[ADE]} + A_{[BEF]} = 2\times1 + 2\times\frac{x\times1}{2} + \frac{2\times\frac{1}{x}}{2} = 2 + x + \frac{1}{x}$.

Logo, $a(x) = 2 + x + \frac{1}{x}$ ($x > 0$), como se pretendia.

b) De acordo com os resultados obtidos com a calculadora gráfica, a área do triângulo [ABC] é mínima para $x = 1$:







c) A função é contínua no seu domínio (IR^+), pois é a soma de funções contínuas em IR^+ , contudo existe a possibilidade de assimptota vertical em $x = 0$.

Determinação da assimptota vertical:

$$\lim_{x\to0^+} a(x) = \lim_{x\to0^+} \left(2 + x + \frac{1}{x}\right) = 2 + 0 + \underbrace{\lim_{x\to0^+} \frac{1}{x}}_{+\infty} = +\infty\ ;$$

Logo, a recta de equação $x = 0$ é uma assimptota vertical do gráfico da função.

Determinação da assimptota oblíqua:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{a(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{x} + \frac{x}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = 0 + 1 + 0 = 1;$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (a(x) - 1\times x) = \lim_{x\to\infty} \left(2 + x + \frac{1}{x} - x\right) = 2 + 0 = 2\ .$$

Logo, $y = x + 2$ é equação de uma assimptota oblíqua do gráfico da função.

(<u>Se preferir</u>: Como $\lim_{x\to+\infty} (a(x) - (x+2)) = \lim_{x\to+\infty} \left(2 + x + \frac{1}{x} - x - 2\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$, então a recta de equação $y = x + 2$ é assimptota oblíqua do gráfico de ***a*** na vizinhança de $+\infty$.)

11.

a) $D_f = \{x \in IR :\ x - 1 > 0 \ \wedge\ \ln(x-1) \neq 0\} = \{x \in IR :\ x > 1 \ \wedge\ x \neq 2\} = \left]1, 2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$.

$$\frac{1}{f(x)} < 2 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} \ln(x-1) < 2 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow\ \begin{cases} \ln(x-1) < \ln e^2 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow\ \begin{cases} x - 1 < e^2 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow\ \begin{cases} x < e^2 + 1 \\ x \in D_f \end{cases} \Leftrightarrow\ x \in \left]1,\ e^2 + 1\right[\setminus \{2\}$$

(Tenha em consideração que a função $x \to \ln x$ é estritamente crescente.)

b) *Determinação de assimptotas verticais*:
A função é contínua no seu domínio, portanto existem apenas dois pontos, $x = 1$ e $x = 2$, onde poderá haver assimptotas verticais.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{1}{\ln(x-1)} = 0 \text{ , pois } \lim_{x\to 1^+} \ln(x-1) = \lim_{x\to 0^+} \ln(x) - \infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{1}{\ln(x-1)}) = -\infty \text{ , pois } \lim_{x\to 2^-} \ln(x-1) = \lim_{x\to 1^-} \ln(x) = 0^-$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{1}{\ln(x-1)}) = +\infty \text{ , pois } \lim_{x\to 2^+} \ln(x-1) = \lim_{x\to 1^+} \ln(x) = 0^+$$

Portanto, apenas a recta de equação $x = 2$ é uma assimptota vertical bilateral do gráfico de *f*.

Determinação de assimptotas não verticais:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x.\ln(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x.} \times \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x-1)} = 0 \times 0 = 0$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - 0.x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln(x-1)} = 0 \text{ , pois } \lim_{x\to+\infty} \ln(x-1) = +\infty$$

Portanto, a recta de equação $y = 0$ é uma assimptota horizontal do gráfico de *f* na vizinhança de $+\infty$.

c) Tendo em consideração que o contradomínio da função $x \to \ln(x-1)$ é IR (note que o gráfico desta função se pode obter por translação associada ao vector $\vec{u} = (1, 0)$ do gráfico da função $x \to \ln x$), facilmente se concluirá que o contradomínio de *f* será $D'_f = IR \setminus \{0\}$.(Tenha em conta o contradomínio da função $x \to \frac{1}{x}$)

Sendo $y = \dfrac{1}{\ln(x-1)}$, virá $\ln(x-1) = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow x - 1 = e^{\frac{1}{y}} \Leftrightarrow x = 1 + e^{\frac{1}{y}}$.   Assim, $\begin{array}{ll} f^{-1}: & IR \setminus \{0\} \to]1, +\infty[\setminus \{2\} \\ & x \to 1 + e^{\frac{1}{x}} \end{array}$

12.

a) No intervalo $]-\infty, 0[$, a função é contínua, pois é o quociente de duas funções contínuas: uma, que é uma função afim, e outra, que é a diferença entre uma função constante e a raiz quadrada de uma função afim.
No intervalo $]0, +\infty[$, a função é contínua, pois é também o quociente de duas funções contínuas: uma, que é a soma de uma função afim com a composta da função logaritmo com uma função afim, e outra que é uma função afim.

Vejamos se a função é contínua em $x = 0$.

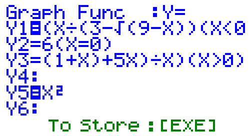
- $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{x}{3-\sqrt{9-x}} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \frac{x.(3+\sqrt{9-x})}{(3-\sqrt{9-x})(3+\sqrt{9-x})} = \lim_{x\to 0^-} \frac{x.(3+\sqrt{9-x})}{9-(9-x)} =$$
  $$= \lim_{x\to 0^-} \frac{x.(3+\sqrt{9-x})}{x} = \lim_{x\to 0^-} (3+\sqrt{9-x}) = 3 + \sqrt{9} = 6$$
- $$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1+x) + 5x}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{\ln(1+x)}{x} + \frac{5x}{x}\right) = 1 + 5 = 6$$
- $f(0) = 6$

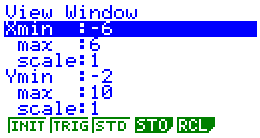
Como $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$, a função é contínua no ponto 0.
A função é, portanto, contínua em *IR*.

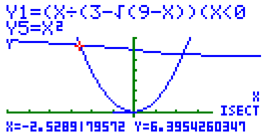
b) As soluções da equação são as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função *f* com a parábola de equação $y = x^2$.

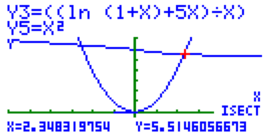
Com recurso à calculadora gráfica, podemos obter:

- parte do gráfico da função *f*
- parte da parábola de equação $y = x^2$
- as abcissas dos pontos de intersecção do gráfico da função com a parábola









As soluções da equação, com aproximação às décimas, são $-2{,}5$ e $2{,}3$.

13. No intervalo $]-\infty, 2[$, quer no intervalo $]2, +\infty[$, a função é contínua, pois é o quociente de duas funções polinomiais (logo contínuas), não se anulando nesses intervalos a função divisor.

Vejamos se a função é contínua em $t = 2$.

- $\lim\limits_{t\to 2} c(t) = \lim\limits_{t\to 2} \dfrac{t^2 - 5t + 6}{t-2} \overset{(\frac{0}{0})}{=} \lim\limits_{t\to 2} \dfrac{(t-2)(t-3)}{t-2} = \lim\limits_{t\to 2}(t-3) = -1$
- $c(2) = -1$

Como $\lim\limits_{t\to 2} c(t) = c(2)$, a função é contínua no ponto 2.

A função é, portanto, contínua em *IR*.

14.

a) $f(1) = \dfrac{(-1)^2 - 1}{1} = 0$ e $f(4) = \dfrac{8}{4} - 1 = 1$.

b) Ora, $\begin{cases} f(c) = \dfrac{1}{2} \\ c \in]1, 4[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{c} - 1 = \dfrac{1}{2} \\ c \in]1, 4[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{c} = \dfrac{3}{2} \\ c \in]1, 4[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = \dfrac{16}{3} \\ c \in]1, 4[\end{cases} \Leftrightarrow c \in \varnothing$. Logo, a afirmação feita é falsa.

O resultado obtido não contraria o teorema de Bolzano-Cauchy, pois *f* não é uma função contínua em $[1, 4]$, visto não ser contínua à direita de $x = 1$.

Com efeito, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) \neq f(1)$, pois $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} (\dfrac{8}{x} - 1) = 7$ e $f(1) = 0$.

c) *Determinação das assimptotas verticais*:

$$\lim_{x\to 0^\mp} f(x) = \lim_{x\to 0^\mp} \frac{x^2 - 1}{x} = \mp\infty .$$

Logo, $x = 0$ é equação de uma assimptota vertical bilateral.

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - 1}{x} = 0$$

Não existe assimptota em $x = 1$, pois os limites laterais nesse ponto são finitos (ver alínea anterior).

Determinação das assimptotas não verticais:

$$m_1 = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{8}{x} - 1}{x} = \lim_{x\to +\infty} (\frac{8}{x^2} - \frac{1}{x}) = 0 ;$$

$$b_1 = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - 0 \times x) = \lim_{x\to +\infty} (\frac{8}{x} - 1) = -1 .$$

Logo, $y = -1$ é equação de uma assimptota horizontal na vizinhança de $+\infty$.

$$m_2 = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{x^2 - 1}{x}}{x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2 - 1}{x^2} = 1 ;$$

$$b_2 = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - 1 \times x) = \lim_{x\to +\infty} (\frac{x^2 - 1}{x} - x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{x^2 - 1 - x^2}{x} = 0 .$$

Logo, $y = x$ é equação de uma assimptota oblíqua na vizinhança de $-\infty$.

O Professor