Escola Secundária da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo de 2003/04 ***Funções exponencial e logarítmica -1*** **12.º Ano**

Nome: ______________________________ N.º: ___ Turma: ____

1. A função $P(x) = 22500.\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$, $x \geq 0$, é usada para determinar o valor de um carro (em euros) x anos depois da sua compra.

a) Qual é o custo inicial do carro?

b) Determine o custo do carro um ano e meio depois da compra.

c) Quanto desvaloriza o carro ao ano?

2. Um psicólogo desenvolveu uma fórmula que relaciona o número *n* de símbolos que uma pessoa pode memorizar no tempo *t*, em minutos.

A fórmula é: $f(t) = 30 \cdot (1 - e^{-\frac{t}{3}})$.

a) Calcule, de acordo com a função *f* e com aproximação às unidades, quantos símbolos uma pessoa pode memorizar em 4 minutos.

b) Uma pessoa memorizou 26 símbolos. Quanto tempo precisou, aproximadamente, para realizar tal tarefa?

3.

a) Para modelar o crescimento de uma cultura de bactérias, um biólogo encontrou a seguinte função:

$$P(t) = 510 \cdot (1{,}8)^t$$

onde *t* representa o tempo em horas, a contar desde o início da observação, no momento em que havia 510 bactérias.

Escreva $P(t)$ na forma $P(t) = 510 \cdot e^{kt}$, com *k* aproximado às centésimas.

b) Durante um período de 10 horas, um biólogo observou uma cultura de bactérias e efectuou os seguintes registos:

T (em horas)	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Número de bactérias (P)	1113	2153	4166	8061	15596	30176	58385	112963	218559	422868	816161

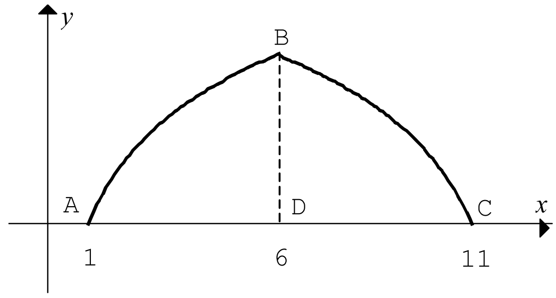
Sabendo que o comportamento do crescimento das bactérias pode ser modelado por uma expressão do tipo $P(t) = k \cdot e^{bt}$, determine $P(t)$. (*t* em horas)

4. Considere um produto que actualmente tem o valor de 3.000 €. Admita que o produto vai aumentar de valor nos próximos 6 anos em 20% ao ano e nos seis anos seguintes vai diminuir de valor 20% ao ano.

Determine o valor do produto, com aproximação às unidades, no final dos 12 anos referidos.

5. Escreva a expressão $e^{x.\ln 2} + e^{\ln x - 2.\ln y} + 5^{-2.\log_5 3}$, ($x > 0$, $y > 0$), sem usar logaritmos.

6. Um arquitecto resolveu usar a função logarítmica para fazer o arco de uma porta, como mostra a figura.



O arco AB é parte da função $y = \ln x$.
O arco BC é simétrico do arco AB relativamente à recta BD.

a) Defina uma função por ramos de modo que represente o arco AB e o arco BC.

b) Determine a altura do arco ($\overline{BD}$).

7. A intensidade ***I***, em decibéis (dB), de um som audível, pode ser dada por:

$$I = 170 + 10.\log_{10} P$$

onde ***P*** é o valor da potência, em certa unidade, do som emitido.

a) Sabe-se que um som com intensidade superior ou igual a 100 dB é prejudicial à saúde.
Conclua daí, a partir de que potência é que devem ser utilizados meios de protecção auditiva.

b) Dois sons de potências P_1 e P_2 são emitidos por uma mesma fonte.

Sabendo que a intensidade do primeiro é dupla da do segundo ($I_1 = 2 \times I_2$), mostre que $\dfrac{P_1}{(P_2)^2} = 10^{17}$.

c) Sendo $\boldsymbol{I} : P \to 170 + 10.\log_{10} P$ uma função real de variável real, caracterize I^{-1}, função inversa de ***I***.

8. Considere a função $f(x) = 2 + \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

a) Determine o domínio da função.

b) Determine *m* de modo que $f(1-m) = 2$

9. Seja a função: $f(x) = \ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right|$

a) Determine o domínio da função.

b) Para estudar a paridade da função, resolva as questões pela ordem apresentada:

b1) Calcule $f(-3)$, $f(-2)$, $f(2)$ e $f(3)$; (valores exactos, como é óbvio!)

b2) Justifique que *f* não é uma função par;

b3) Mostre que $f(-3) = -f(3)$ e $f(-2) = -f(2)$. A função poderá ser uma função ímpar?

b4) Mostre que *f* é uma função ímpar.

c) Determine *x* de modo que $f(x) \geq 0$.

Sugestão: Recorde que $|y| \geq a \Leftrightarrow y \leq -a \vee y \geq a$, para $a > 0$.

d) Verifique a resolução desta questão utilizando o *Graphmatica* ou a calculadora gráfica.

10. Considere a função real de variável real

$$t(x) = 9^x - 27 - 6 \times 3^x .$$

Determine o seu domínio e os seus zeros.
Verifique a resolução desta questão utilizando o *Graphmatica* ou a calculadora gráfica.

11. Determine *x*, de modo que $f(x) < g(x)$, sendo:

a) $f(x) = \ln(x-1)$ e $g(x) = \ln(3x)$

b) $f(x) = 2^{-x}$ e $g(x) = 3^{-x}$

12. Determine os zeros e caracterize a função inversa de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = 6^{-x+1}$

b) $f(x) = 2 - \log(x+3)$

c) $f\colon R^{+} \to R$, tal que $f(x) = \ln x^{2}$.

13. Considere a função real de variável real, assim definida: $t(x) = 1 + \log(x^{2} - 1)$.

a) Determine o domínio e os zeros da função.

b) Justifique que a função não admite função inversa.

c) Resolva a condição $t(x) < 0$.

d) Considere as funções, reais de variável real, assim definidas:

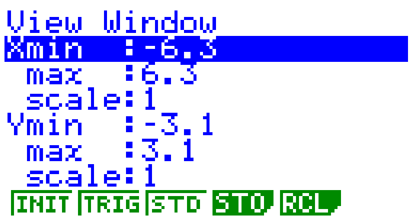
$$f(x) = x + 1 \qquad g(x) = \log x \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^{2} - 1$$

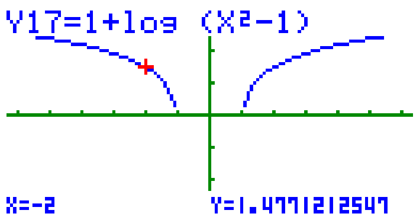
Tendo em consideração que $t(x) = (f \circ (g \circ h))(x)$ e ainda todo o estudo feito sobre as funções *f*, *g* e *h*, determine o contradomínio da função *t*. Explique o seu raciocínio.

e) Mostre que a expressão algébrica da correspondência (não função) inversa da função *t* é $x = \pm\sqrt{1 + 10^{y-1}}$ e comprove o conjunto indicado na alínea anterior.

f) Caracterize j^{-1}, função inversa da função *t* restrita a $]1, +\infty[$.

g) Verifique na sua calculadora gráfica o representado a seguir:





h) Como explica o observado confrontando-o com as respostas às alíneas c) e d)?

i) Agora, utilize o *Graphmatica* para verificar a resolução deste exercício.

14. O número de células de certo tipo é dado em função do tempo t (em segundos), pela igualdade

$$N(t) = N_0 \times 2^{\frac{t}{k}}, \quad \text{com } k \text{ e } N_0 \text{ números reais positivos.}$$

a) Calcule $N(t)$ para $t = 0$ e $t = k$ e deduza qual o significado das constantes N_0 e k.

b) Suponha agora que $N_0 = 100$ e $k = 100$.
Calcule o instante em que o número de células se torna 16 vezes maior do que no instante inicial.

15. Numa grande cidade surgiu uma epidemia de gripe asiática. A evolução da doença foi dada pela fórmula

$$P = 2^{-0,25 \cdot t^2 + t + 5},$$

onde P representa a percentagem de pessoas infectadas e t o tempo em dias após a declaração da epidemia pelo Serviço Nacional de Saúde (SNS).

a) Determine, analiticamente, o período de tempo (em horas) em que a percentagem de pessoas infectadas foi superior ou igual à existente no momento da declaração da epidemia.

b) Quando da declaração da epidemia, o SNS sossegou a população da cidade informando que a situação não era de preocupar, pois tinham sido tomadas todas as medidas recomendadas e que a epidemia seria erradicada em menos de uma semana.

Numa pequena composição, comente o teor das declarações do SNS, tendo em conta que:

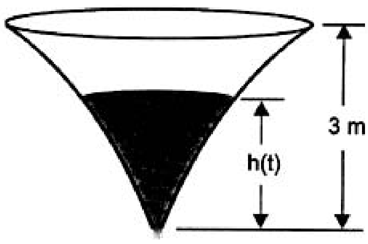
- a epidemia considera-se erradicada quando a percentagem de pessoas infectadas for inferior a 1%;
- por questões de saúde pública e de acordo com a Organização Mundial de Saúde, este tipo de epidemia configura uma situação muito grave quando afecta uma população em mais de 60% por um período superior a 24 horas.

Nota: Na resolução desta questão, deve utilizar as capacidades gráficas da sua calculadora e enriquecer a sua composição com o traçado de um ou mais gráficos.
Não é obrigatório a determinação analítica de valores que considere indispensáveis, desde que os apresente com uma aproximação razoável e indique o processo que utilizou recorrendo à calculadora.

16. A figura representa um reservatório com três metros de altura.
Considere que, inicialmente, o reservatório está cheio de água e que, num certo instante, se abre uma válvula e o reservatório começa a ser esvaziado.
O reservatório fica vazio ao fim de catorze horas.

Admita que a altura, em metros, da água no reservatório, t horas após este ter começado a ser esvaziado, é dada por

$h(t) = \log_2(a - bt)$, $t \in [0, 14]$, onde a e b são constantes reais positivas.



a) Mostre que $a = 8$ e que $b = \frac{1}{2}$.

b) Prove que a taxa de variação média de h no intervalo $[6, 11]$ é $-0,2$.
Interprete este valor no contexto da situação descrita.

Nota: A utilização da calculadora não será permitida para a resolução desta questão.

c) Caracterize t, função inversa de h.

17. Utilizando uma calculadora gráfica a Ana descobriu que a equação $\log x^2 = 2\log 3$ tinha duas soluções, que eram 3 e -3. De seguida, resolveu algebricamente a equação seguindo os seguintes passos:

$$\log x^2 = 2\log 3 \Leftrightarrow 2\log x = 2\log 3 \Leftrightarrow \log x = \log 3 \Leftrightarrow x = 3$$

Onde está o erro? Justifique.

18. Sabendo que $\frac{1}{4} > \frac{1}{8}$, então $(\frac{1}{2})^2 > (\frac{1}{2})^3$.
Na inequação que se segue, $a > 1$:

$$\log_a(\tfrac{1}{2})^2 > \log_a(\tfrac{1}{2})^3 \Leftrightarrow 2\log_a(\tfrac{1}{2}) > 3\log_a(\tfrac{1}{2}) \Leftrightarrow 2 > 3$$

Onde está o erro? Justifique.

19. Num Instituto de Pesquisa Ecológica estudou-se a relação entre o oxigénio consumido por pequenos animais e o respectivo peso. Encontrou-se a fórmula aproximada

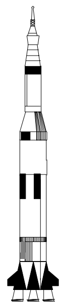
$$\log y = \log 6 + 0{,}9.\log x$$

onde y é o volume de oxigénio em microlitros por hora e x o peso da colónia em gramas.

a) Exprima y em função de x.

b) Sendo y_2 o oxigénio correspondente ao peso $x_2 = 100x$, calcule $\frac{y_2}{y}$ e interprete o resultado.

20. Ao ser lançado, um foguetão é impulsionado pela expulsão dos gases resultantes da queima de combustível numa câmara.
Desde o arranque até se esgotar o combustível, a velocidade do foguetão, em quilómetros por segundo, é dada por:



$$v(t) = -3.\log_2(1 - 0{,}005t) - 0{,}01t$$

A variável t designa o tempo, em segundos após o arranque.

a) A massa inicial do foguetão é de 150 toneladas, das quais 80% correspondem à massa do combustível. Sabendo que o combustível é consumido à taxa de 0,75 toneladas por segundo, justifique que $t \in [0, 160]$.

b) Prove que a taxa de variação média de v no intervalo $[100, 150]$ é 0,05.
Interprete este valor no contexto da situação descrita.

SOLUÇÕES

1.

a) 22.500 €.

b) Aproximadamente 14.614 €.

c) 25%.

2.

a) 22 símbolos.

b) 6 minutos.

3.

a) $P(t) = 510 \cdot e^{0{,}59t}$, (2 c.d.).

b) $P(t) = 1113.e^{0{,}66t}$, (2 c.d.).

4. 2348 € aproximadamente).

5. $2^x + \frac{x}{y^2} + \frac{1}{9}$.

6.

a) $f(x) = \begin{cases} \ln x & \Leftarrow \quad 1 \le x \le 6 \\ \ln(-x+12) & \Leftarrow \quad 6 < x \le 11 \end{cases}$.

b) 1,79 u. c. aproximadamente.

7.

a) A partir de potências superiores ou iguais a 10^{-7} dB devem ser utilizados meios de protecção auditiva.
($I \ge 100 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow P \ge 10^{-7}$).

b) $I_1 = 2 \times I_2 \Leftrightarrow ... \Leftrightarrow \frac{P_1}{(P_2)^2} = 10^{17}$.

c) $\begin{array}{ll} I^{-1}: & IR \to IR^+ \\ & I \to 10^{\frac{I-170}{10}} \end{array}$.

8.

a) $]-1,1[$.

b) $m=1$.

9.

a) $R\setminus\{-1,1\}$.

c) $x\in R_0^+\setminus\{1\}$.

10. $D_t=R$; apenas tem um zero: $x=2$.

11.

a) $x\in\,]1,+\infty[$.

b) $x\in\,]-\infty,0[$.

12.

a) Não tem zeros.

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ & IR^+\to IR \\ & x\to 1-\log_6 x \end{aligned}.$$

b) $x=97$.

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ & IR\to\,]-3,+\infty[\\ & x\to -3+10^{2-x} \end{aligned}.$$

c) $x=1$.

$$\begin{aligned} f^{-1}:\ & IR\to R^+ \\ & x\to \sqrt{e^x} \end{aligned}.$$

13.

a) $D_t=\,]-\infty,-1[\,\cup\,]1,+\infty[$;

$x=-\dfrac{\sqrt{110}}{10}$, $x=\dfrac{\sqrt{110}}{10}$.

c) $x\in\left]-\frac{\sqrt{110}}{10},-1\right[\cup\left]1,+\frac{\sqrt{110}}{10}\right[$.

.

f)

$$\begin{aligned} j^{-1}:\ & IR\to\,]1,+\infty[\\ & x\to \sqrt{10^{x-1}+1} \end{aligned}.$$

14.

a) $N(0)=N_0$ e $N(k)=2N_0$.

b) O número de células torna-se 16 vezes maior do que no instante inicial decorridos 6 minutos e 40 segundos após esse instante.

15.

a) Há 32% de pessoas infectadas no momento da declaração da epidemia, pois $P(0)=2^5=32$.
A percentagem de pessoas infectadas foi superior ou igual à existente no momento da declaração da epidemia durante as primeiras $4\times 24=96$ horas após essa declaração.
($P(t)\geq 32 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow t\in[0,4]$)

16.

c)

$$\begin{aligned} t:\ & [0,3]\to[0,14] \\ & h\to 16-2^{h+1} \end{aligned}$$

17. A condição dada tem domínio $R\setminus\{0\}$ e a condição $2\log x=2\log 3$ tem domínio R^+.
Portanto, a primeira equivalência que estabeleceu apenas é válida em R^+ e não no domínio da equação que pretendia resolver. Daí não ter determinado a solução negativa.

18. Como $a>1$, então $\log_a\frac{1}{2}<0$.
O erro ocorreu na última passagem, pois dividimos os dois membros da inequação por um número negativo ($\log_a\frac{1}{2}$), pelo que o sinal da desigualdade deveria ter sido trocado.

19.

a) $y=6.x^{0,9}$

b) $\dfrac{y_2}{y}=100^{0,9}\approx 63{,}1$.
O resultado obtido pode ser interpretado da seguinte maneira: *Quando o peso duma colónia destes animais aumenta 100 vezes, o volume de oxigénio consumido aumenta (apenas) cerca de 63 vezes*.

20.

a) A massa de combustível é $0{,}8\times 150=120$ toneladas. Como é consumido à taxa de $0{,}75$ t/s, o combustível dura $120\div 0{,}75=160$ segundos.
Como *v* está definida desde o arranque do foguetão até se esgotar o combustível, conclui-se que $t\in[0,160]$.

O Professor