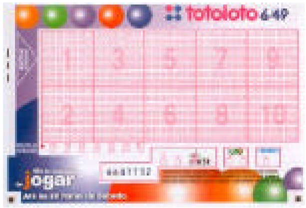
Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04 — ***Probabilidades - Revisões*** — **12.º Ano**

Nome: ____	N.º:___	Turma:____

1. O TOTOLOTO 6/49



O Totoloto surgiu em 1985. Criado pelo Decreto-Lei n.º 382/82 de 15 de Setembro só mais tarde, através do Decreto-Lei n.º 84/85, de 28 de Março, o Estado concedeu à SCML o direito à sua organização e exploração.
O primeiro concurso realizou-se a 30 de Março desse ano.
O jogo consiste na escolha de seis números, entre 49 possibilidades.
Assim, os prognósticos são efectuados traçando as cruzes nos quadradinhos e estabelecendo conjuntos de seis números.
Os prémios são atribuídos a partir do acerto em três dos números escolhidos.
As apostas simples têm de ser em número par (2, 4, 6, 8 e 10 apostas), começando pelos dois primeiros conjuntos da esquerda e continuando sem intervalo.
Em cada conjunto, marcam-se com cruzes (X), os seis números escolhidos.
As apostas múltiplas fazem-se sempre no conjunto 1 dos bilhetes. Podem ser preenchidas 7 a 12 números, assinalando o quadradinho referente às apostas mútuas.
No início de 1988 surgiu uma nova modalidade de aposta de aposta múltipla, o 5/44. O apostador escolhe 5 números fixos que combinam uma vez, com cada um dos restantes 44, perfazendo um total de 44 apostas.
O bilhete de cinco semanas permite participar em cinco concursos seguidos, com os mesmos conjuntos de números.
http://www.djogos.scml.pt/totoloto/historia/index.html

totoloto 6/49

EXTRACTO DO REGULAMENTO

- A participação nos concursos implica o integral conhecimento, adesão e plena aceitação das normas regulamentares publicadas em Diário da República.
- Em cada semana haverá dois concursos cujos sorteios ocorrerão ao sábado e à segunda-feira.
- A participação das apostas nos concursos através do sistema de registo e validação informático, só é válida quando registadas nos suportes informáticos do sistema central e uma cópia deste suporte se encontre em poder do Júri dos Concursos, antes do início dos sorteios.
- A participação no Loto 2 é facultativa, está dependente da participação no Loto 1 e implica o pagamento conforme tabelas.
- Os prognósticos fazem-se pela marcação de uma cruz (x), sendo em número de 6 nas apostas simples, a iniciar no 1.º conjunto, e de 7, 8, 9, 10, 11, 12 ou 5 marcações nas apostas múltiplas, a inscrever no 1.º conjunto, devendo ser assinalado o grupo respectivo.
- Há apenas um concurso semanal do Joker.
- A participação no Joker é facultativa, deve ser assinalada no espaço próprio no bilhete, implica o pagamento do preço da aposta e só é efectiva com a validade do jogo principal.
- Os prémios do Joker são de valor fixo, com excepção do 1.º prémio cujo valor será variável, em função da receita das apostas participantes e do número de prémios das outras classes. O seu valor mínimo será de €150.000,00
- O recibo emitido pelo terminal de jogo, depois da leitura do bilhete, é o único instrumento válido para solicitar o pagamento dos prémios.
- Os prémios de valor até €50,00 são pagos em qualquer dos mediadores que disponham de terminal de jogo.
- Para jogar em 5 semanas consecutivas, assinalar no local próprio.
- As reclamações fora dos prazos (12 dias para prémios iguais ou superiores a €1.000,00 e 60 dias para os de valor inferior, contados a partir da data do sorteio do Loto 2), não são consideradas.
- O preço unitário da aposta é de €0,35 para o Totoloto e de €0,75 para o Joker.
- A caducidade dos prémios é de 90 dias.

AP	1 SEMANA Sem Joker	1 SEMANA Com Joker	5 SEMANAS Sem Joker	5 SEMANAS Com Joker
2	€0,70 €1,40	€1,45 €2,15	€3,50 €7,00	€7,25 €10,75
4	€1,40 €2,80	€2,15 €3,55	€7,00 €14,00	€10,75 €17,75
6	€2,10 €4,20	€2,85 €4,95	€10,50 €21,00	€14,25 €24,75
8	€2,80 €5,60	€3,55 €6,35	€14,00 €28,00	€17,75 €31,75
10	€3,50 €7,00	€4,25 €7,75	€17,50 €35,00	€21,25 €38,75

Departamento de Jogos: R. das Taipas, n.º 1 - 1250-264 Lisboa; Telefs: 21 3210300 - Fax: 21 3210486
www.djogos.scml.pt E-mail: lotos.lotarias@djogos.scml.pt

Quanto mais jogar, mais hipóteses tem de ganhar.
Totoloto. É Fácil, é Barato e dá Milhões.

PREÇOS E TABELA DE PRÉMIOS EM MÚLTIPLAS

Cruzes marcadas (Sem Joker / Com Joker)	Acertos	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
5 cruzes (44 apostas)	5	1	1	42	–	–
1 semana	4 + suplem.	–	2	–	42	–
€15,40 €30,80 — €18,15 €31,55	4	–	–	2	42	–
5 semanas	3	–	–	–	3	41
€77,00 €154,00 — €90,75 €157,75	2	–	–	–	–	4
7 cruzes (7 apostas)	6 + suplem.	1	6	–	–	–
	6	1	–	6	–	–
1 semana	5 + suplem.	–	1	1	5	–
€2,45 €4,90 — €3,20 €5,65	5	–	–	2	5	–
5 semanas	4	–	–	–	3	4
€12,25 €24,50 — €16,00 €28,25	3	–	–	–	–	4
8 cruzes (28 apostas)	6 + suplem.	1	6	6	15	–
	6	1	–	12	15	–
1 semana	5 + suplem.	–	1	2	15	10
€9,80 €19,60 — €10,55 €20,35	5	–	–	3	15	10
5 semanas	4	–	–	–	6	15
€49,00 €98,00 — €52,75 €101,75	3	–	–	–	–	10
9 cruzes (84 apostas)	6 + suplem.	1	6	12	45	20
	6	1	–	18	45	20
1 semana	5 + suplem.	–	1	3	30	40
€29,40 €58,80 — €30,15 €59,55	5	–	–	4	30	40
5 semanas	4	–	–	–	10	40
€147,00 €294,00 — €150,75 €297,75	3	–	–	–	–	20
10 cruzes (210 apostas)	6 + suplem.	1	6	18	90	80
	6	1	–	24	90	80
1 semana	5 + suplem.	–	1	4	50	100
€73,50 €147,00 — €74,25 €147,75	5	–	–	5	50	100
5 semanas	4	–	–	–	15	80
€367,50 €735,00 — €371,25 €738,75	3	–	–	–	–	35
11 cruzes (462 apostas)	6 + suplem.	1	6	24	150	200
	6	1	–	30	150	200
1 semana	5 + suplem.	–	1	5	75	200
€161,70 €323,40 — €162,45 €324,15	5	–	–	6	75	200
5 semanas	4	–	–	–	21	140
€808,50 €1617,00 — €812,25 €1620,75	3	–	–	–	–	56
12 cruzes (924 apostas)	6 + suplem.	1	6	30	225	400
	6	1	–	36	225	400
1 semana	5 + suplem.	–	1	6	105	350
€323,40 €646,80 — €324,15 €647,55	5	–	–	7	105	350
5 semanas	4	–	–	–	28	224
€1617,00 €3234,00 — €1620,75 €3237,75	3	–	–	–	–	84

2003-D — LISGRÁFICA – Artes Gráficas, S.A. – 10.000.000 ex.

Nota: O preço unitário da aposta é € 0,35 para o Totoloto e de € 0,75 para o Joker.

a) Justifique que a aposta múltipla de 11 cruzes corresponde a 462 apostas simples.

b) Por que razão a aposta múltipla de 5 cruzes custa € 15,40 ?

c) Para 12 cruzes marcadas e apenas em relação aos casos de 3 e 4 acertos, explicando o seu raciocínio, comprove os valores indicados.

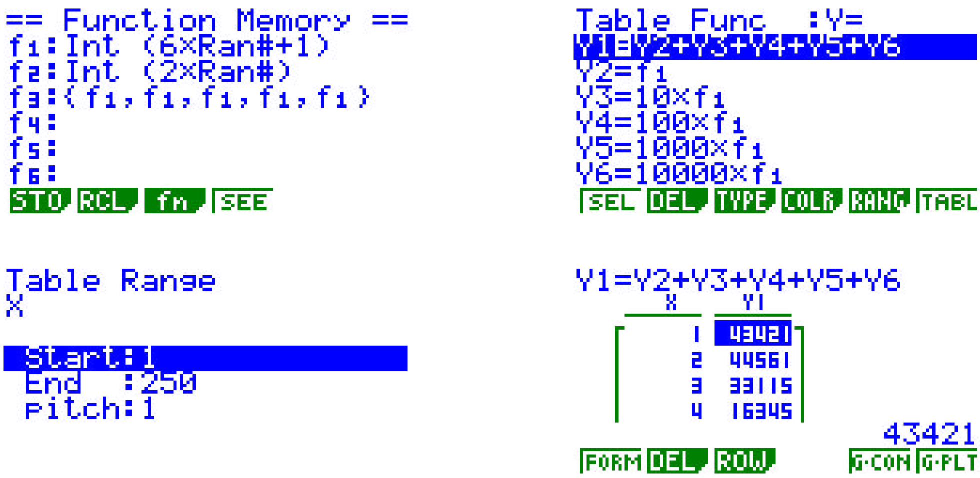
2. Um Jogo de 5 Dados

Lançam-se cinco dados.
Para ganharmos tem de sair o número 5 mas não pode sair o 6.
Qual é a probabilidade de ganhar?

a) Efectuando uma **simulação** com a calculadora gráfica obtenha experimentalmente uma aproximação razoável para essa probabilidade.

Sugestão:

Certamente ainda tem definida na sua calculadora CASIO a função f_1 que permite simular o lançamento de um dado. Defina as 6 funções conforme aparece na imagem em baixo, defina a RANG sugerida e obtenha a tabela com os 250 valores de y_1.



Nota: No exemplo, nas 4 primeiras jogadas feitas, só ganhámos na terceira.

Faça a contagem das vitórias obtidas nessas 250 jogadas. De seguida junte os seus resultados aos dos restantes colegas da turma.

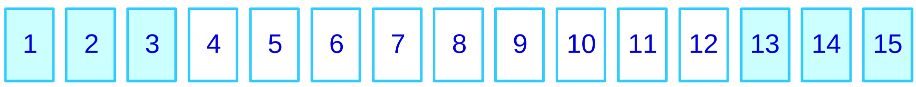
b) Determine o valor teórico dessa probabilidade.
Faça um comentário sobre os dois valores determinados.

3. Três Bilhetes de Cinema

Resolva por <u>**quatro processos**</u> o seguinte problema:

A professora de História resolveu levar os seus 15 alunos a ver um filme.
Como o cinema tem filas de precisamente 15 cadeiras, comprou uma fila inteira e distribuiu os bilhetes ao acaso pelos alunos.
A Ana, a Bela e a Carla são muito amigas e gostavam de ficar as três juntas e numa das pontas da fila.

Qual é a probabilidade de isso acontecer?



«Uma questão que se coloca muitas vezes perante os problemas de Probabilidades é o facto de existirem vários processos de os resolver. Normalmente isso sucede por, perante a situação descrita no problema, se poderem considerar diferentes espaços de resultados conforme a abordagem que se faça. Para calcular a probabilidade aplicando a definição de Laplace, devemos dividir o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Ora, a cada espaço de resultados irá corresponder um diferente número de casos possíveis e, claro, um diferente número de casos favoráveis.

O principal cuidado a ter é usar exactamente o mesmo método na contagem dos casos favoráveis e na contagem dos casos possíveis, ou seja, não mudar de espaço de resultados a meio da resolução.»

O Professor

Escola Secundária/3 da Sé-Lamego

Ficha de Trabalho de Matemática

Ano Lectivo 2003/04 **Probabilidades - Revisões** **12.º Ano**

Proposta de Resolução:

1. O TOTOLOTO 6/49

a) A aposta simples é constituída pela selecção de 6 dos 49 números, de 1 a 49.
Ao efectuar uma aposta múltipla de 11 cruzes estamos a seleccionar 11 desses 49 números.
Ao convertermos essa aposta múltipla em apostas simples temos de seleccionar de cada vez apenas 6 desses 11 números. Cada uma dessas apostas diferirá das outras quando pelo menos um dos números seleccionados é diferente, não interessando a ordem por que são escolhidos. Trata-se, portanto, de determinar quantos subconjuntos de 6 elementos é possível obter de um conjunto de 11.

Assim, a aposta múltipla de 11 cruzes corresponde a ${}^{11}C_6 = 462$ apostas simples.

b) A chave do Totoloto é constituída por 6 números. O apostador ao marcar 5 cruzes não selecciona 44 dos 49 números. Cada um destes números é, por sua vez, integrado automaticamente no grupo dos 5 marcados. Desta forma, a aposta múltipla de 5 cruzes corresponde a 44 apostas simples. Daí que o seu preço seja de $44 \times €\,0{,}35 = €\,15{,}40$.

c) <u>*Para 3 acertos*</u>:

Das 12 cruzes, três delas assinalam 3 números certos (**C**) - pertencentes à *chave* - e as restantes nove assinalam 9 números errados (**E**) - não pertencentes à *chave*.

C C C E E E E E E E E E

Como a aposta simples é composta por 6 cruzes (seis números), convertendo a aposta múltipla em apostas simples conclui-se que as apostas premiadas, além das três cruzes certas, serão completadas com 3 cruzes erradas.

Assim, o número de apostas (simples) premiadas com o **5.º prémio** (3 números certos) será $N_1 = C_3^9 = 84$.

<u>*Para 4 acertos*</u>:

Raciocinando da mesma maneira, temos agora a situação: **C C C C E E E E E E E E**
Para o **4.º prémio** será: $N_2 = C_2^8 = 28$.

Para o **5.º prémio** será: $N_3 = C_3^4 \times C_3^8 = 4 \times 56 = 224$.(Note que para este prémio apenas há 3 números certos em cada uma das apostas simples premiadas com o 5.º prémio, ficando, portanto, um deles de fora)

2. Um Jogo de 5 Dados

a) Efectuada uma **simulação** com a calculadora gráfica foram obtidos os seguintes resultados:
N.º de lançamentos: 250
N.º de vitórias: 69

O valor experimental obtido é $p = \frac{69}{250} = 0{,}276$.

b) <u>*Um processo*</u>:

O número de casos possíveis quando são lançados cinco dados são os arranjos com repetição dos 6 números: $NCP = {}^6A'_5 = 6^5 = 7776$.

O número de casos favoráveis (sair 5 mas não sair 6) tem de ser feito em duas etapas.

Primeiro, <u>não pode sair 6</u>: são os arranjos com repetição dos números de 1 a 5.

Casos em que **não sai 6** : $N_{\overline{6}} = {}^5A'_5 = 5^5 = 3125$.

Segundo, <u>não pode sair 6 mas tem de sair 5</u>. Então, aos 3125 casos anteriores temos de subtrair os casos em que também não sai 5.

Casos em que **não sai 6 nem 5**: $N_{\overline{65}} = {}^4A'_5 = 4^5 = 1024$.

Casos em que **não sai 6 mas sai 5**: $NCF = N_{\overline{6}} - N_{\overline{65}} = 3125 - 1024 = 2101$.

Logo, $p = \frac{2101}{7776} \approx 0{,}27019$.
A probabilidade de ganhar o jogo é praticamente igual a 27%.

Outro processo:

Podemos decompor os lançamentos favoráveis em cinco tipos:

- sair cinco "5" e zero "6": $N_5 = 1^5 = 1$
- sair quatro "5" e zero "6": $N_4 = {}^5C_4 \times 4^1 = 20$
- sair três "5" e zero "6": $N_3 = {}^5C_3 \times 4^2 = 160$
- sair dois "5" e zero "6": $N_2 = {}^5C_2 \times 4^3 = 640$
- sair um "5" e zero "6": $N_1 = {}^5C_1 \times 4^4 = 1280$

(As combinações são relativas ao número de maneiras de sair exactamente o número de "5" e os arranjos com repetição relativos ao número de maneiras de não sair "6" nem "5", isto é, de sair "1", "2", "3" ou "4".)

Logo, $p = \dfrac{1+20+160+640+1280}{7776} = \dfrac{2101}{7776} \approx 0{,}27019$.

3. Três Bilhetes de Cinema

1.º Processo

Vamos pensar apenas nos três bilhetes destinados às três amigas, não nos interessando a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares.

O espaço de resultados é o conjunto dos ternos não ordenados. Por exemplo, um dos seus elementos é o terno $\{5, 7, 15\}$, que corresponde às três amigas receberem os bilhetes 5, 7 e 15 embora não saibamos o lugar exacto em que cada uma delas se vai sentar.

Os casos possíveis são as diferentes maneiras de elas receberem os 3 bilhetes de um conjunto de 15, ou seja, todos os ternos não ordenados formados a partir do conjunto de 15 bilhetes.

Casos Possíveis: $NCP = C_3^{15} = 455$.

Os casos favoráveis são apenas 2: ou recebem os bilhetes 1-2-3 ou os bilhetes 13-14-15.

Logo, $p = \dfrac{2}{455}$.

2.º Processo

Vamos pensar nos três bilhetes destinados às três amigas, mas interessando-nos agora a ordem como elas ocuparão depois esses três lugares. Continuamos a ignorar os outros 12 bilhetes.

O espaço de resultados é o conjunto dos ternos ordenados. Por exemplo, um dos seus elementos é o terno $(5, 7, 15)$, ou seja, a Ana fica no lugar 5, a Bela no 7 e a Carla no 15.

Os casos possíveis são portanto as diferentes maneiras de elas receberem 3 bilhetes de um conjunto de 15, mas em que a ordem por que recebem os bilhetes é importante.

Casos Possíveis: $NCP = A_3^{15} = 27300$.

Se os bilhetes que elas receberem forem 1, 2 e 3, como a ordem interessa, há seis maneiras de elas os ocuparem (são as permutações de 3). O mesmo se passa para os bilhetes 13, 14 e 15.

Logo, os casos favoráveis são: $NCF = 2 \times P_3 = 12$.

Assim, $p = \dfrac{12}{2730} = \dfrac{2}{455}$.

3.º Processo

Desta vez vamos considerar todas as maneiras como os 15 alunos se podem sentar nos 15 lugares.

O espaço de resultados é constituído por todas as permutações dos 15 alunos pelas cadeiras.

Os casos possíveis são portanto as permutações de 15.

Casos Possíveis: $NCP = P_{15} = 15!$.

Se as três amigas ficarem nos lugares 1, 2 e 3, podem permutar entre si, e os outros 12 alunos também. O mesmo se passa se ficarem nos três últimos lugares. Então:

Casos Favoráveis: $NCF = 2 \times P_3 \times P_{12} = 2 \times 3! \times 12!$.

Logo, $p = \dfrac{2 \times 3! \times 12!}{15!} = \dfrac{12}{15 \times 14 \times 13} = \dfrac{2}{455}$.

4.º Processo

Vamos calcular a probabilidade pedida admitindo que os bilhetes vão ser entregues um a um às três amigas.

A primeira vai receber o seu bilhete. Dos 15 lugares, há 6 que lhe servem (os três primeiros e os três últimos).

Chegou a vez da segunda. Há 14 bilhetes e a ela só servem os dois lugares que restam na ponta onde a primeira ficou.

Finalmente, a terceira, dos 13 bilhetes restantes, tem de receber o único que sobra na ponta onde estão as amigas.

Logo, $p = \dfrac{6 \times 2 \times 1}{15 \times 14 \times 13} = \dfrac{6}{15} \times \dfrac{2}{14} \times \dfrac{1}{13} = \dfrac{2}{455}$.

Portanto, **NÃO ESQUEÇA**:

Uma questão que se coloca muitas vezes perante os problemas de Probabilidades é o facto de existirem vários processos de os resolver. Normalmente isso sucede por, perante a situação descrita no problema, se poderem considerar diferentes espaços de resultados conforme a abordagem que se faça. Para calcular a probabilidade aplicando a definição de Laplace, devemos dividir o número de casos favoráveis pelo número de casos possíveis. Ora, a cada espaço de resultados irá corresponder um diferente número de casos possíveis e, claro, um diferente número de casos favoráveis.

O principal cuidado a ter é ***usar exactamente o mesmo método na contagem dos casos favoráveis e na contagem dos casos possíveis****, ou seja, <u>não mudar de espaço de resultados a meio da resolução</u>.*

José Paulo Viana
Escola Secundária Vergílio Ferreira (Lisboa)